微积分的创立者及其先驱

李心灿 编

航空工业出版社

微积分的创立者及其先驱

李 心 灿 编

航 空 工 业 出 版 社

1 9 9 1

内 容 简 介

本书用简练的文字，介绍了60多位微积分的创立者及其先驱的简要经历、学术成就、治学态度、治学方法。概括性的论述了微积分的萌芽、创建、发展过程。其中还包含了一些科学家的趣闻轶事。

本书是学习微积分的补充读物，也是《高等数学》的一本教学参考书，既可供各类高等学校师生参考，又可供广大数学爱好者阅读。

微积分的创立者及其先驱

李心灿 编

航空工业出版社出版发行

（北京市和平里小关东里14号）

—邮政编码：100029—

全国各地新华书店经售

航空工业出版社印刷厂印刷

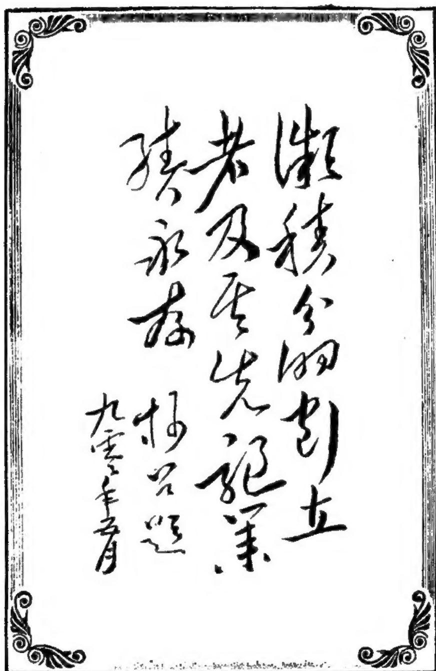
1991年4月第1版　　1991年4月第1次印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　印张：6.875

印数：1-2800　　字数：180 千字

ISBN 7-80046-330-3/G·041

定价：4.50 元



中国科学院学部委员
中国數学学会名誉理事长 柯召教授为本书的题词：

微积分的创立者及其先驱业绩永存

序　言

如果将整个数学比作一棵大树，那么初等数学是树根，名目繁多的数学分支是树枝，而树干的主要部分就是微积分。这只是一个粗浅的比喻，说明微积分的重要性以及它和各科之间的关系。学习微积分当然应该有初等数学的基础，而学习任何一门近代数学或者工程技术都必须先学微积分。因此在所有的理工科大学中，微积分总是一门必修课程。

微积分的创立，与其说是数学史上，不如说是人类历史上的一件大事。时至今日，它对工程技术的重要性就像望远镜之于天文学，显微镜之于生物学一样。它的出现并不是偶然的，它有一个漫长的成长过程。早在古希腊时代，阿基米德等人的著作就已含有积分学的萌芽。以后经过一千多年的沉寂，欧洲在文艺复兴以后对阿基米德的学说重新掀起研究的热潮，涌现出许多先驱者。而微积分真正的确立是在17世纪。从笛卡儿的解析几何开始，接着是微积分的创建，它将数学的历史带入一个新的时期——变量数学时期。

如果对微积分的发展历史有所了解，就会对这个学科有更深入更全面的认识。知道千百年来先辈们是怎样经过艰苦卓绝的奋斗才取得今天的成果，必然对他们肃然起敬。他们不但给人类留下了宝贵的文化遗产，也给后人作出了光辉的榜样。我们应该学习他们刻苦钻研，勇往直前的精神。当然，先贤是人而不是神，也可能有这样那样的缺点，有成功的经验，也有失败的教训。我们除了吸取经验之外，也要避免重蹈覆辙。

可惜目前的教科书很少讲数学发展的历史，某些定理、公式虽然依惯例冠以创立者之名，但常不加注释，以致读者不知他是何许人。

本书就是为补救这一缺憾而编写的。书中选择了60多位在微积分领域内有贡献的学者，以简练的篇幅一一作了介绍。使读者对他们的学术成就、风格、道德品质以及所建立的理论有概括的了解。对理论本身也给以深入浅出的描述。这将有助于提高学习兴趣，激发学习的积极性。把定理公式和名人轶事联系起来，往往使人印象深刻甚至终生难忘。

本书言简意赅。如果读者受到先辈们事迹的鼓舞，进一步努力去掌握更多的数学知识，为祖国四化建设服务，这将是作者衷心的希望。

梁宗巨

于1990年春分日

编 者 的 话

“如果我们想要预见数学的未来，适当的途径是研究这门科学的历史和现代。”

——庞加莱 (Poincare)

《微积分》是我国高等院校的一门重要基础课。当代著名数学家柯朗（Courant）曾指出：“微积分，或者数学分析，是人类思维的伟大成果之一。它处于自然科学与人文科学之间的地位，使它成为高等教育的一种特别有效的工具。遗憾的是，微积分的教学方法有时流于机械，不能体现出这门学科乃是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶。”在多年的教学实践中，我发现很多学生在学完微积分之后，，对微积分的形成、发展以及是由哪些数学家、在什么年代、分别做出了怎样的贡献，也就是说对微积分发生、发展的历史并不怎么了解。德国著名数学家外尔(Weyl)说：“如果不知道远溯古希腊各前辈所建立和发展的概念、方法和成果，我们就不能理解近50年数学的目标，也不能理解它的成就。”事实确实如此。

为了给学习微积分的读者提供一本补充读物，给微积分教学提供一本参考书，在有关同志的建议和鼓励下，我参考了一些文献和书籍，编写了此书。试图用尽可能简短的篇幅，对微积分的创立者及其先驱的生平、业绩作梗概的介绍，从而使读者了解：微积分是一系列数学思想历经漫长岁月演变的结果，它深深扎根于人类活动的许多领域；微积分是两千多年来，许多数学家艰苦卓绝奋斗的集体成果，是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶，只要人类认识和改造自然的努力一日不止，这种奋斗就将继续不已。

本书从公元前的毕达哥拉斯 (Pythagoras)开始，直到本世

纪的勒贝格 (Lebesgue) 和鲁滨逊(Robinson) 为止，共介绍了60多位数学家。早在毕达哥拉斯关于不可公度的发现以及关于数与无限这两个概念的定义中，就已孕育了微积分学的思想方法。经历了中世纪的黑暗与文艺复兴。直到17世纪，牛顿(Newton)和莱布尼茨 (Leibniz) 才创立起微积分。牛顿和莱布尼茨的最大功绩，是将微积分中两个中心问题联系了起来，即将求切线问题与求积问题联系了起来，并且他们解决问题的方法不是特殊的，而是带有较大的普遍性。所以人们把牛顿和莱布尼茨看成微积分的发明者。但是这并没有认为或意味着作为今天这门学科基础的定义和概念仅仅是他们两人的工作。因为：一方面，在牛顿和莱布尼茨之前的许多杰出科学家，例如：古希腊时代的欧多克索斯 (Eudoxus) 、阿基米德 (Archimedes) ，意大利的伽利略 (Galilei) 、卡瓦列利 (Cavalieri)、德国的开普勒(Kepler)、法国的费尔马 (Fermat) 、笛卡儿 (Descartes)、帕斯卡(Pascal) 、荷兰的惠更斯 (Huygens) 、英国的沃利斯 (Wallis)、巴罗 (Barrow) 、格雷戈里 (Gregory) 等等，都对微积分的创立做了许多重要的准备工作。在我国刘徽和祖冲之在计算圆面积及圆周率等问题时，已包含有极限思想；另一方面，在牛顿和莱布尼茨创立微积分之后，18世纪在科学和数学问题中，应用了微积分所取得的辉煌成果，使人们把注意力首先放在应用而无暇顾及所依据的理论是否可靠，基础是否扎实，这就出现了谬误越来越多的混乱局面。所以在这个阶段，对于这门学科的逻辑基础仍然缺乏清晰的观念。到了19世纪，人们力图为微积分的有关概念寻找一个令人满意的基础，这种坚持不懈的努力，带来了一种更富于批判的精神，直到经过柯西(Cauchy)、魏尔斯特拉斯 (Weierstrass)、戴德金 (Dedekind) 、康托尔 (Cantor) 等很多大数学家的努力，填补了一个又一个的漏洞，才把微积分建立在牢固的逻辑基础之上。到了本世纪，微积分又从两个完全不同的角度作了推广：一是勒贝格把积分概念推广到适合更广泛的一类函

数，且有更良好的性质，也就是所谓的勒贝格积分理论。从某种意义上来说，勒贝格的积分理论为现代分析奠定了基础；二是鲁滨逊的非标准分析，把17世纪和18世纪经常使用的无穷小概念置于严格的逻辑基础之上，为微积分提供了另一种描述方式。他们两人在这方面的贡献，使得本书有一较完善的结尾。

本书除了介绍微积分创立者及其先驱的生平、业绩外，还介绍一些他们的治学态度、治学方法，或一些趣闻轶事。因为这些内容往往能刻划出他们对事业的执着追求，刻划出他们的人品、个性、情趣等等。

微积分的创立者及其先驱虽然都是一批杰出人物，在科学上做出了重要贡献。然而"金无赤足，人无完人。""玉有瑕疵也斑斓"因此本书无意隐晦他们的缺点或错误。我认为他们成功的经验和优秀的品质首先值得我们学习，而他们失败的教训和错误，不也是"前车之鉴，后世之师"吗？

我相信，作为一个教师，如果熟悉了微积分的创立者及其先驱的生平、业绩、治学态度、治学方法、趣闻轶事等等，一定会把微积分讲授得更生动有趣和更富于哲理。而对于很多正在学习数学的学生或数学爱好者，一旦了解了这些数坛前辈们的学术成就和道德风范，也必将从中受到鼓舞，进而提高学习兴趣，激发刻苦钻研，勇往直前的奋斗精神。

本书在编写过程中，得到了许多同志的热情鼓励和具体帮助：北京航空航天大学的蒋正新先生、徐兵先生、邵鸿飞先生；南昌航空工业学院的黄汉平先生；北京轻工业学院的闵泰山先生分别审阅了本书的初稿或部分初稿，提出了不少宝贵建议，并对文字作了推敲和润色；中国科学史学会副理事长、全国数学史学会副理事长梁宗巨先生认真审阅了本书的全部书稿，提出了一些非常宝贵的建议，并为本书写了序言；中国航空教育学会和航空航天工业部科学技术研究院对本书的编写给予了支持，在此一并表示衷心的感谢。

本书主要是根据或参考书后“参考文献”中所列的书籍、文章里的有关文字、资料、照片编写而成。在此，特向这些作者、译者致谢并向读者致意。由于水平所限，本书所介绍的微积分的创立者及其先驱的名单或业绩可能是不完全的，若有遗漏、不当、错误之处，恳请读者批评指正。

当书稿发排付印之际，适逢我的老师、四川大学名誉校长、中国数学学会名誉理事长、中国科学院学部委员柯召先生80寿辰暨执教60周年之时，先生为了激励青年努力学好数学，挥毫为本书题写了：“微积分的创立者及其先驱业绩永存。”他的这一题词，不仅对微积分的创立者及其先驱的业绩作了高度评价，而且对学习微积分的读者寄托了深切期望。

李心灿

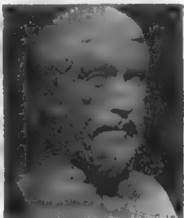
1991年5月于北京航空航天大学

目　录

毕达哥拉斯 (Pythagoras)

（约公元前560—前480）

毕达哥拉斯是希腊哲学家、数学家、音乐理论家、天文学家。约公元前 560 年生于小亚细亚西岸的萨摩斯岛，约公元前 480 年卒于梅塔蓬图姆（今意大利半岛南部）。



毕达哥拉斯

毕达哥拉斯早年曾在锡罗斯岛（在爱琴海中）跟费雷西底 (Pherecydes) 学习，后来从师于伊奥尼亚学派的安纳西曼德(Anaximander)，有的资料说他曾在被誉为"科学之祖"的泰勒斯 (Thales) 指导下进行过学习和研究。以后游历埃及、巴比伦等地，学到了不少数学、天文知识，回到家乡后开始讲学。公元前520年左右，为了逃避暴君波利克拉底(Polycrates) 的统治，移居西西里岛，最后定居在意大利半岛南端的克罗托内。在那里广收门徒，建立了一个宗教、政治、学术合一的团体，其成员都潜心于学术研究，从而形成为毕达哥拉斯学派。这个学派组织是很严密的，每个成员都要接受长期的训练和考核，遵守很多清规戒律，宣誓永不泄露学派的秘密和学说。毕达哥拉斯学派在政治上代表奴隶主贵族的利益，因而受到当时兴起的奴隶解放运动的冲击，毕达哥拉斯被迫移居梅塔蓬图姆，约公元前 480 年被政敌杀害。克罗托内的活动场所也被捣毁，他的门徒逃散到希腊其它学术中心，继续进行数学、哲学研究以及有关的政治活动，并保持

着其奠基人的传统。直到公元前 4 世纪中叶，这个学派繁荣兴旺长达一个世纪之久，而且对后来数学的发展，特别是对微积分的发展，产生了深远的影响。

华达哥拉斯学派有一种规定，就是要将一切发明和发现都归于学派的领袖，且秘而不宣，因此我们所谈到的毕达哥拉斯的贡献，确切地说应该是指该学派的贡献。

毕达哥拉斯是希腊早期最著名的哲学家，有的资料说“哲学家”这一词就是由毕达哥拉斯创造的。毕达哥拉斯学派的哲学基础是“万物皆数”。他们将抽象的数作为万物的本源。正如亚里士多德 (Aristotle) 所说：“毕达哥拉斯学派把数看成本质，这就是说，看成是万物的元素。”他们研究数学的目的是企图通过揭示数的奥秘来探索宇宙的永恒真理。他们发现数与几何图形、数与音乐的和谐、数与天体的运行都有密切关系。从而把整个学习课程分为四大部分：1.数的绝对理论——算术；2.静止的量——几何；3.运动的量——天文；4.数的应用——音乐。合起来称为“四艺”。后来加上文法、逻辑、修辞，合称“七艺”。他们相信对几何形式和数学关系的沉思能达到精神的解脱，音乐则被看作是达到解脱、净化灵魂的手段。黑格尔 (Hegel) 说：“毕达哥拉斯学派的哲学形成了实在论哲学到理智哲学的过渡。”

毕达哥拉斯是历史上有可靠记载的第二个希腊数学家（第一个一般是指泰勒斯）。数学作为一门科学实际上始于毕达哥拉斯，正如公元前 4 世纪的科学史家欧德缪斯 (Eudemus) 所说：“毕达哥拉斯创立了数学，并把它变成一门高尚的艺术。”作为演绎科目的数学并把它构成一个数学的知识体系，是毕达哥拉斯及其门人的杰出贡献。基于“万物皆数”的信念，他们首先把抽象的数的观念放到首要地位，并把算术与几何紧密联系起来，例如把算术中的单位看作“没有位置的点”，而把几何的点看作“有位置的单位”。他们提出了区别奇数、偶数、素数的方法；

发现了完全数（若一个数等于其全部真因子之和，则称这个数是完全数）、亲和数（两个数是亲和的，即每一个数是另一个数的真因子之和。284 和220就是毕达哥拉斯最先发现的第一对亲和数）。毕达哥拉斯还证明了：若2^n-1是素数，则$2^{n-1}(2^n-1)$是完全数。他们还研究了：三角形数(见图 1-1)，正方形数（见图1-2），五边形数（见图1-3）等等。



图 1-1 三角形数示意图



图 1-2 正方形数示意图



图 1-3 五边形数示意图

毕达哥拉斯本人尤以发现勾股定理著称于世（我国商高早在毕达哥拉斯600多年之前，就已经发现了勾三股四弦五的结论。不过最先对勾股定理给出合乎逻辑的演绎证明，则属于毕达哥拉斯学派）。更重要的是由于这个学派对勾股定理的研究，导致了不可公度量的发现（据亚里士多德称，毕达哥拉斯学派是用归缪法证明了边长为 1 的正方形的边长与对角线长是不可公度的）。

不可公度量的发现是这个学派卓越的贡献，也是数学史上的重大事件，但却和该学派的信条相悖，因为他们认为万物都可以用数来表示，他们所谓的数就是整数与分数，除此以外他们不知道也不承认别的数。不可公度量的发现表明有些量不能用他们所说的数来表示，这对他们的信条是一个致命的打击并使之惶恐不安。相传他们为此竟将最先发现不可公度量的本学派成员希帕萨斯（Hippasus）投海毙命。

毕达哥拉斯学派对建立先验的演绎法，在一定范围内获得了显著的成就。他们承认并强调数学的对象是抽象的思维，同实际事物有所区别。他们在数学中引入逻辑因素，对命题加以证明，这方面可以说做了大量工作，这些工作为欧几里得公理化体系奠定了基础。他们证明了泰勒斯提出的三角形内角和定理；给出了多边形内角和定理；证明平面可用等边三角形、正方形、正六边形填满，空间可用立方体填满；发现了正五角形和相似多边形的作法；研究了黄金分割；发现了五种正多面体，并将它们与自然界中各种物质对应起来。在他们看来几何学是自然界所固有的，几何学理想化的概念好象通过物质世界而得以实现。这种抽象与具体的混同，理性观念与经验描述的混同，是整个毕达哥拉斯学派和以后不少思想派系所具有的共同特点，正是这种特点对微积分概念的萌发产生很大影响。

毕达哥拉斯学派的一个很重要的贡献是面积贴合理论。它在希腊几何学中是基本理论，以致后来发展而产生了穷竭法。面积贴合的方法使他们能够说明一个由直线围成图形大于、等于、小于另一个图形。这种把一个图形贴合到另一个图形上去的方法，是试图给面积概念以明确定义的开端。在这种观念中，一个面积的单位被认为是以一定的倍数被包容在另一面积之中。希腊数学家不是说一个图形的面积，而只是说两个面的比。这样一种定义方法，由于不可公度问题的存在，在数的概念还没有发展到完善的程度以前是无法使之精确化的。它一直到19世纪下半叶方才形成

确切定义，也正是这样的概念才奠定了整个微积分学的基础。但是，人们之所以认识到需要有这种概念，应该归功于毕达哥拉斯学派的贡献，因为正是他们发现了这种需要，可以说在微积分概念的发展史上跨出了第一步，或者说才使之有了一个开端。

毕达哥拉斯是一个音乐理论家。他发现：对于有同样张力的琴弦，为了使音阶提高8度，则长度应取原长度的1/2；若要提高5度，则应取原长的2/3；若要提高4度，则应取原长的3/4；他们还注意到，在用三根弦发音时，当这三根弦的长度之比数为3，4，6时，就得到和声的谐音。这些成果是数学物理中最早记载的事实，这使毕达哥拉斯成为音阶的科学研究的鼻祖。

毕达哥拉斯学派在天文学方面也有不少见地。他们不但认为数与天体运行有密切联系，存在着“宇宙的和谐”，还从唯美主义出发，认为：一切平面图形中圆形最美；一切立体图形中球形最美；而宇宙的结构是符合美的原则的；从而首创了地圆说。认为日、月、五星以及其它天体都呈球形，浮在太空中，天体的运行都沿着圆形的轨道作匀速运动。还认为天体之间的距离应该服从音阶之间的音程比例。毕达哥拉斯原先认为地球是宇宙的中心，但他的门徒(如希塞塔斯 (Hicetas)、菲洛劳斯 (Philoaus) 等人）放弃了这一观点，认为地球绕着“中心火”(Central fire，不是太阳）旋转。有人认为他们已经建立了太阳中心说，这是误解。但他们确已发现地球每日自转一周，这是关于地球自转的最早假设。他们还注意到月球的轨道与地球的轨道不在同一平面上，而与该面倾斜成一角度。毕达哥拉斯还是第一个认为启明星 (Phosphorus) 和昏星 (Hesperus) 是同一颗星的希腊人，此星我们现在称为金星。

安蒂丰（Antiphon）

（约公元前480—前411）

安蒂丰是古希腊的数学家、辩论家、政治家，约生于公元前480年，卒于公元前411年。

安蒂丰是雅典“智人学派”（有时又称“哲人学派”或“诡辩学派”）的代表人物。智人学者以教授学生修辞学、雄辩术、文法、逻辑、数学、天文等为业。他们经常出入群众集会场所，发表应时演说。智人学派研究的主要目标之一是用数学来了解宇宙是怎样运转的。而他们对数学的主要研究课题，是所谓三大作图问题：1.倍立方——求作一个立方体的边，使该立方体的体积为给定立方体的两倍；2.三等分任意角——分一个给定的任意角为三个相等的部分；3.化圆为方——作一正方形，使其面积与给定圆的面积相等。

安蒂丰在研究化圆为方的问题时，首创了“穷竭法”。他认为，内接于圆的一个正三角形，如果依次把图形的边数倍增（成为内接正6边形，12边形等等），内接多边形的顶点，归根到底占用圆周上所有点，最后得到的多边形与圆相符合。由此，他认为，给出多边形能作出与其等积的正方形，从而也能解化圆为方的问题。虽然安蒂丰的结论是错误的，但他解题的思想方法是极为美妙的，历史上称作为“穷竭法”或“耗尽法”。安蒂丰的方法之所以叫做穷竭法，是因为用内接三角形的面积覆盖了圆面积的大部分，6边形的面积又覆盖了这个圆面积的更大部分，这样随着多边形边数的增加，多边形的面积越来越接近圆的面积，即圆与内接多边形的面积之差最终将被穷竭。他的“穷竭法”后来被欧多克索斯（Eudoxus）和阿基米德（Archimedes）发展为一种

较为严格的理论，并利用它得到了许多关于面积和体积问题的重要成果。“穷竭法”也是近代极限理论的雏形。

安蒂丰还研究过宇宙的物理结构和天体的性质。

作为政治家，安蒂丰是“四百人会议”进行反民主改革的鼓吹者，此次会议于公元前411年成立，是一个寡头政治组织，企图在伯罗奔尼撒战争中夺取雅典政权。“四百人会议”垮台之后，安蒂丰以叛逆之罪被处死。

安蒂丰的主要著作有《论真理》、《政治家》、《论和谐》、《释梦》等。另外还有作品15篇，其中3篇：《关于谋杀希罗底斯案》、《关于歌舞艺人》、《斥继母》均系法庭辩护词，其余12篇，分3组，每组4篇，又称之为四部曲，作为教授门徒时练习之用。四部曲中每篇包括有关谋杀案件的控诉词及辩护词各一篇。他的这些作品语言高雅，论理清晰、明确，绝少人身攻击之词。从而为后世所推崇。特别是在他被处死之前，为自己辩护的一篇演说词，被希腊历史学家修昔底德（Thucydides）誉之为“自古以来最出色的求生辩护词”。

德谟克利特（Democritus）

（约公元前460—前357）

德谟克利特是古希腊数学家、唯物主义哲学家，公元前460年左右生于爱琴海北岸的阿布提拉，卒于公元前357年左右。



德谟克利特

德谟克利特在希腊家乡定居从事哲学、数学研究之前，曾游历东亚各国，并在埃及研究古代数学达7年之久。从其老师留基伯（Leucippus）那里接受了小亚细亚理性主义的世界观，共同创立了“原子论”学派。

德谟克利特最为著名的观点是“原子论”，他认为：世界万物都是由无限多个简单的、永恒的原子组成的。这些原子的形状、大小、次序和位置各有差异，但每个物体都是由这些原子以某种方式组合而成的。虽然他认为几何上的量是无限可分的，而原子则是终极的、不可分的质点（“原子”这个词的希腊文atom就是不可分割）。硬度、形状和大小是原子的现实物理性质。其它性质如味、色、热则来自观察者而非原子本身所固有。原子论者认为自然界不断变化的现象可用数学真实地表示出来，而且认为世界上所发生的一切都是由数学规律严格确定了的。

德谟克利特也用原子论的观点解释数学。他认为，线段、面积、立体是由有限个不可再分的原子构成的。计算体积不过是将这些原子集合起来。这种想法好象很不严格且不太合理，但它却

促使古代数学家作出许多新的发现。德谟克利特是第一个得出圆锥或棱锥体积为等底等高的圆柱或棱柱体积的 $\frac{1}{3}$ 的人。但他是如何得出这些结果的，我们已无从考证。正四棱锥的体积公式，也许最先是埃及人得到的，德谟克利特周游各地时学到了这个公式，从而把结果推广到所有棱锥体的情形。圆锥的体积则可能是以边数无限增加的正多边形为锥底所得到的结果的一个推广。

德谟克利特似乎将物理上的原子和数学上的原子明显地加以区分，因为他认为凡线段总能无限分割。他对与无限分割有关的其它数学问题也感兴趣，其中就有一个是关于弯角（即由在一点具有共同切线的两条曲线所组成的角）的问题，还有一个是关于无理（不可公度）的线段和立体的问题。由此可以想到，毕达哥拉斯学派遇到的不可公度的困惑，德谟克利特对此也许是很清楚的，而且还可能试图用某种数学原子论的理论去解释它。

德谟克利特的原子论对后来的数学家有着深刻的影响。阿基米德就用过这种方法寻找一些问题的答案，然后再用严密的理论使其精确化。直到16世纪的开普勒（Kepler），将圆看作无数顶点在圆心上的三角形的和，便带有“原子法”的遗风。

后世的学者对数学原子论持有不同的见解，有的认为体积是由同维数的原子构成，有的则认为是由低一维的面所构成。

德谟克利特不仅对数学、哲学，而且对物理学、天文学、动物学、美学都有研究，并且他的一些看法与现代的观点极为相似。例如，他认为，银河是小星球凝聚成的巨大团块。他的著作有73种之多，几乎包罗了人类知识的各个方面，可惜其原著作都已失传，我们只能从他人的著作中间接地了解他的研究成果。

德谟克利特长寿百岁，并以“令人发笑的哲学家”著称。因为，他的哲学能让人愉快，并对愚蠢给予了嘲弄。

德谟克利特强调道德教育的重要性，主张道德可教，认为道德教育可以改变一个人的性格，造成人的第二本性，而教育方法应以鼓励和说服为主。

德谟克利特认为：“不应该追求一切种类的快乐，应该只追求高尚的快乐。”他一生追求科学，并曾说：“宁肯找到一个因果的解释，不愿获得一个波斯王位”。

欧多克索斯（Eudoxus）

（约公元前400—前347）

欧多克索斯是古希腊的数学家、天文学家。公元前400年生于尼多斯（在今土耳其西南角），约公元前347年卒于尼多斯。



欧多克索斯

欧多克索斯曾受教于柏拉图(Plato)和阿尔希塔斯(Archytas)。在柏拉图学园中学习时，生活贫困，居住在雅典的港口比雪埃夫斯，因为这里可以找到较便宜的住处。他每天往返学校就要走10英里的路程。以后他又到了埃及，在那里学习天文。曾在小亚细亚北部的基齐库斯创办了一所学校，不久他又把学校迁到雅典，执教多年。后来成为雅典立法官，受到希腊人的崇敬。

欧多克索斯对天文学和数学都作出了贡献。

在天文学方面，欧多克索斯是天体运动学说的首创者，在希腊他最早指出了一年并不是整整365天，而是365天6小时。他还在希腊最早介绍了球面天文学。为了解释太阳系成员的视动他提出了同心球体系说法，并为了使天体的合成运动符合实际观测数据，他在处理曲面和空间曲线（即行星运动轨迹）方面表现出高超的数学技巧。他在天文历法方面的著作有：《镜》、《现象》、《太阳的隐没》、《八年周期》、《论速率》等，遗憾的是原著已失传，现今只知道其内容的片断。他还画了一幅新的胜

过赫克斯特的地图。他又是第一绘制星象图的希腊学者，他将天空按经度、纬度划分，后来这个概念也被用到地球表面的划分。几百年后，西塞罗（Cicero）称欧多克索斯是希腊最伟大的天文学家。

在数学方面，欧多克索斯的最大功绩是发展了比例理论，欧几里得《几何原本》第5卷《比例论》大部分内容都得自于欧多克索斯的工作。欧多克索斯引入了“量”这个概念，它不是数，而是代表诸如线段、角、面积、体积、时间这些能够连续变动的东西，然后他定义了两个量之比并定义比例，从而把可公度比与不可公度比都包括在内。他的比例论完全排除了毕达哥拉斯学派只能适用于可通约量的算术方法，而纯粹用公理法建立理论，把能够或不能够表示成整数比的事物，统一在新的几何解释之中，因此没有区别可通约和不可通约的必要。欧多克索斯的比和比例理论暂时解决了可公度与不可公度量的矛盾。著名数学家波尔察诺(Bolzano)讲过他自己的一段极妙的趣闻：波尔查诺在布拉格度假时得了病，浑身打战，萎靡不振，为了排遣痛苦与无聊，他顺手拿了欧几里得（Euclid）的《几何原本》。平生第一次拜读了第5卷中关于欧多克索斯的比和比例的理论的精采阐述，其巧妙的处理深深吸引了他，使他不禁拍案叫绝，精神大振、病体痊愈。自那以后，每当他的朋友偶感不适，他就建议那人去读欧多克索斯的比例理论，说那是灵丹妙药。现今数学中的“阿基米德公理”：“对于任意两个正实数a，b，必存在自然数n，使得na＞b。”原来的说法是：如果两条线（或两张面、两个立体）不等，就可以在两者之差的上面加上它本身，一次一次加上去，使得每一个同类的量（线、面、体）都被超过。阿基米德明确地把它归功于欧多克索斯。后来19世纪德国数学家戴德金（Dedekind）就是遵循了欧多克索斯的这个思想定义无理数，从而为实数系的建立打下了基础，所谓戴德金分割实际上是欧多克索斯比例理论的算术化提法。欧多克索斯发展了穷竭法，这个

成就使他在微积分的发明中分享着荣誉，因为这的确是微积分的先声。他用这种方法证明了：两圆面积之比等于其半径平方之比；两球体积之比等于其半径立方之比；圆锥体和棱锥体的体积各为同底同高的圆柱体和棱柱体体积的$\frac{1}{3}$，这种在希腊数学中曾起过重要作用的方法是十分严谨的，它的基础是这样一条命题：“设给定两个不相等的量，如果从其中较大的量减去比它的一半大的量，再从所余的量减去比它的一半大的量，继续重复这个过程，则所余的某一个量将小于给定的较小的量。”因为反复运用命题所指出的步骤，余下的量我们可以让它小于任意所指定量。因而欧多克索斯所引进的方法就被称为穷竭法。这也是极限论的前驱。由于他的方法直观、生动而符合逻辑，希腊人普遍地可以接受他给出的论证，这就大大地普及了这种方法的应用。欧多克索斯的工作是以明确的公理为依据进行演绎推理的。他还深入地研究过“黄金分割”。

欧多克索斯不但是数学家、天文学家，而且还是一位法学家、地理学家和医生。在医学上他研究过人体的结构，并对动物进行了解剖。埃拉托塞尼（Eratosthenes）称赞欧多克索斯是一位“神明似的人”。

阿基米德 (Archimedes)

(约公元前287—前212)

阿基米德是古希腊的数学家、力学家。约公元前287年生于西西里岛的叙拉古；约公元前212年卒于叙拉古。



阿基米得

阿基米德的父亲是一位天文学家，自幼给予他良好的教育。阿基米德早年在亚历山大跟随欧几里得的学生学习，后来回到他的故乡，但仍和亚历山大的学者保持着密切的联系。

阿基米德的成果，一直被推崇为创造性和精确性的典范。欧洲经历了漫长的中世纪的黑夜之后，才达到他当时的数学水平。罗马时代的科学史家普林尼 (Plinius) 曾把他誉为“数学之神”。

阿基米德的几何著作是希腊数学的顶峰。他把欧几里得严格的推理方法与柏拉图先验的丰富想象和谐地结合在一起，达到了至善至美的境界。从而“使得往后由开普勒、卡瓦列利 (Cavalieri)、费尔马 (Fermat)、牛顿 (Newton)、莱布尼茨(Leibniz)等人相继培育起来的微积分日趋完美”。阿基米德没有把欧多克索斯发展的穷竭法作为发现新结果的唯一工具，而是把它跟德谟克利特和柏拉图学派曾经探索过的无穷小量观念巧妙地结合起来，并且做得灵活自如。可以说，古代没有一位数学家

象他那样地走到了微积分的边缘。他在对某些面积和体积的论述中，得出了我们初等微积分课本中出现的许多与定积分等价的关系。他的主要数学著作有：《圆的测量》，主要是研究圆周和圆面积的计算问题；《论球与圆柱》，主要是研究球的表面积和体积的计算问题，其中很多命题的证明，已经接近了微积分的思想方法，但没有求助于极限的概念；《抛物线求积法》，研究了曲线图形求积问题，并巧妙用穷竭法求得“任何由直线和直角圆锥体的截面所包围的弓形，其面积等于与其同底同高的三角形面积的$\frac{4}{3}$”，他的方法很接近于现行的积分法；《论劈锥曲面体与球体》，这部著作中有40个命题，在这些命题中运用了穷竭法；《砂计算法》，是一本专门讲记数法的书；《论螺线》一书是阿基米德所有数学贡献中最光彩夺目的部分，后世的数学家从他作螺线切线的方法中已感受到了微积分的思维方式，其实它已经是微积分的先声。

阿基米德也是古希腊最伟大的力学家。在他之前没有人能象他那样把几何学与力学结合得如此紧密而完美，象他那样巧妙地用几何方法来证明力学结论。他在物理方面的著作主要有：《论浮体》，他发现了浮力定律——浸在流体中的物体受到向上的浮力，其大小等于物体自身所排开流体的重量；《论杠杆》，他发现了杠杆原理——当杠杆所受作用力和所克服的阻力在同一平面时，作用力和力臂的乘积等于阻力和重臂的乘积。对此他曾自豪的说：“只要给我们立足之地，我就能够移动地球”。他还著有《论平板平衡》；《论重心》；《论制作球》；《镜面反射》等。同时他还是闻名于世的天文学家。

阿基米德的著作以精确和严谨著称。其完美令人叹为观止，油然而生敬。

阿基米德是一位伟大的爱国者。在第二次布匿战争时期，他把自己的科学知识用于保卫祖国，流传了许多传说和故事：当进犯的罗马战船驶近城下时，他设计了一种起重机把敌船吊起，使

船底朝天；他用许多抛物镜面的铜镜的聚焦性质，把日光集中到罗马船上，使它们起火；他制造了一种能投射大石的机械，使敌军心胆惧裂等。致使敌军统帅马塞拉斯（Marcellus）惊呼："我们是在同数学家打仗！他安稳地呆在城里，却能够击毁我们的船只。猝然间向我们发射出那么多利箭，简直赛过了百手巨人！"传说后来敌兵不敢靠近城墙，就是城上抛出一根绳子也会吓得敌兵仓惶逃跑，因为他们怕是阿基米德的新奇武器。然而，在围城三年之后终因粮绝和敌人的离间诡计，致使叙拉古陷落敌手。当该城被洗劫时，阿基米德仍专心致力于数学问题的研究，俯身在沙盘上画他的几何图形。一个罗马士兵命令阿基米德离开，他傲慢地做手势说："别把我的圆弄坏了！"士兵拔出短剑，这位旷古绝伦的伟大学者，竟丧生在一个凶残无知士兵之手。罗马统帅出于对阿基米德的才能和人品的敬佩，特为他修建了一座颇为壮观的陵墓，在墓碑上刻着球内切于圆柱的图形。因为阿基米德曾发现"球的体积及表面积，都是其外切圆柱体体积及表面积的⅔。"

近代数学史专家倍尔（Bell）说："任何一张列出有史以来三个最伟大的数学家的名单中，必定包括阿基米德。"莱布尼茨甚至说："了解了阿基米德的人，对后来杰出人物的成就不会就再那么钦佩了。"

阿波洛尼厄斯（Apollonius）

（约公元前262—前190）

阿波洛尼厄斯是古希腊的数学家、天文学家，公元前262年左右生于小亚细亚的佩尔加（在今土耳其南岸）；公元前190年卒于佩尔加。

阿波洛尼厄斯青年时代去亚历山大跟随欧几里得的门徒学习，后来访问过帕加马王国（在小亚细亚西北）并在那里新建的大学和图书馆工作过，以后他又回到亚历山大任教。

阿波洛尼厄斯是几何学中综合法的能手。他以欧几里得的传统写了一部巨著《圆锥曲线论》。这部巨著除了综合前人的成就外，还有自己独到的见解，它几乎将圆锥曲线的性质网罗殆尽，是古希腊几何学的登峰造极之作。这部著作使他在同辈之间赢得了“大几何学家”的称号，并对17世纪数学的发展产生了深远的影响。

《圆锥曲线论》共有8卷400多个命题。但希腊原文本只有前4卷被保存了下来，在中世纪发现了另外3卷的阿拉伯译文本，第8卷已失传。

在阿波洛尼厄斯之前，柏拉图学派的门奈赫莫斯（Menaechmus）尝试解决倍立方问题时，发现了圆锥曲线，他取三个正圆锥：若其两条母线的最大交角是直角，这圆锥叫做“直角圆锥”；若是锐角，这圆锥叫做“锐角圆锥”；若是钝角，这圆锥叫做“钝角圆锥”。然后各作一平面垂直于一条母线，此平面与圆锥面相截的截线，分别称为“直角圆锥曲线”、“锐角圆锥曲线”、“钝角圆锥曲线”，这是最早对圆锥曲线的定名。阿波洛尼厄斯改进了门奈赫莫斯的方法，他定义了双圆锥（即两个相同

的、但方向相反并有共同顶点的圆锥）。指出过定点的直线绕与定点不共面的圆周运动，则直线生成双圆锥之表面。进而证明：圆锥曲线都能靠变化截面的角度从双圆锥面上得到，而不必要求垂直于母线。阿波洛尼厄斯是第一个依据同一个圆锥的截线来研究圆锥曲线理论的人，也是第一个发现双曲线有两支的人。抛物线（parabola，齐曲线）”、“椭圆（ellipse，亏曲线）”、“双曲线（hyperbola，超曲线）”等名称就是阿波洛尼厄斯引入的，从而取代了门奈赫莫斯所用的“直角圆锥曲线”、“锐角圆锥曲线”、“钝角圆锥曲线”之称。阿波洛尼厄斯比较了三种圆锥曲线的异同，若用现代的术语和符号来表达，可将直角坐标系的原点放在锥的顶点上，使对称轴与OX轴重合，则锥线方程是

$$y^2 = 2px + qx^2$$

他证明$q<0$时是椭圆，$q>0$时是双曲线 $q=0$时是抛物线。

坐标的思想，在阿波洛尼厄斯的著作中已有萌芽。他以圆锥底面直径为横坐标，过顶点的垂线作为纵坐标，但这一思想没有充分发挥。

值得指出的，阿波尼厄斯的《圆锥曲线论》，引用了前人（如欧几里得、阿基米德）的许多成果但不加声明，而且言词颇不谦逊，这一点常为后世评论者所非议。

除了《圆锥曲线论》外，阿波洛尼厄斯还写了下列著作：《论比例截点（或截线、截面）》（181个命题）；《论特殊截点（或截线、截面）》（124个命题）；《论确定的截点（或截线、截面）》（83个命题）》；《相切》（124个命题）；《斜向》（125个命题）；《平面轨迹》（147个命题）。只有《论比例截点（或截线、截面）》保存下来了，不过是阿拉伯文的。为复原这6本书，后来的学者作了不少努力：哈雷（Halley）于1706年复原了前两本；西摩松（Simson）于1704年复原了第三本；韦达（Vieta）于1600年复原了第四本；盖塔尔提（Ghetal-

di）于1607年，安德森（Anderson）于1612年，荷尔斯利（Horsley）于1770年，复原了第五本；费尔马于1637年，复原了第六本。由于费尔马在复原《平面轨迹》一书时，受到其启发而发现了解析几何的原理，因而这本书在数学史中有着特殊的地位。阿波洛尼厄斯还研究过从定点到已知圆锥曲线的最大和最小距离问题。

阿波洛尼厄斯还写过一本关于求圆面积的书，名叫《快速算法》，他在那里自认为用较好的算术方法改进了阿基米德定出的π的近似值。这是阿波洛尼厄斯脱离古典希腊数学风格的唯一著作。他的另一论著《论无序有理数》扩充了最初由欧多克索斯提出并在欧几里得《几何原本》中出现过的不可公度量的理论。

阿波洛尼厄斯是定量的数理天文学的奠基人，为解释行星的运动，他引进了偏心圆运动和本轮运动系统，其中最令人感兴趣的是他确定行星的留（在轨道上停下来并开始逆行的点）的方法。他的大部分天文学研究是考察月球运动的。因此，人们称他为ε（ε是希腊字母，读作伊普西隆），因为ε这个记号和月亮相似。

阿波洛尼厄斯与欧几里德、阿基米德合称为亚历山大前期的三大数学巨人。

阿波洛尼厄斯富于想象，他曾说："摹仿只会仿制它所见到的事物，而想象连它所没有见过的事物也能创造，因为它能从现实里推出理想。"

刘 徽 (Liu Hui)

（约225—295）

刘徽是我国数学家，魏晋时代人。籍贯、生卒年月不详，有的资料说他是现今山东临淄或淄川一代的人，约生于225年左右，卒于295年左右。



刘 徽

我国古代数学，传下来的主要有10种，称为“算经十书”。其中最重要的一种是《九章算术》，全书共有九章：（1）方田，主要讲分数四则算法和平面图形的面积算法；（2）粟米，主要讲粮食的交换计算；（3）衰分，主要讲配分比例和等差、等比数列等问题；（4）少广，主要讲从田亩（平面图形），或球的体积，求出边长或径长的算法，其中讲到了多位数开平方、开立方的方法；（5）商功，讲各种立体的体积计算；（6）均输，处理粮食运输，均匀负担等问题；（7）盈不足，讲盈亏类问题的解法，其中使用了“盈不足术”，实际上就是现在的线性插值法；（8）方程，主要讲解联立一次方程（线性方程组）；（9）勾股，讲勾股定理的应用和简单测量问题的解法。以《九章算术》为代表的中国古代传统数学，与欧几里得《几何原本》为代表的西方数学，代表着两种迥然不同的体系。《九章算术》着重应用和计算，其成果往往以算法形式表达。《几何原本》着重概念与推理，其成果以定理形式表达。从而形成东西辉映、大相径庭的两部数学名著。

刘徽在数学上的主要成就之一，是为《九章算术》做了注释，书名叫《九章算术注》，此书于魏景元4年（公元263年）成书，共9卷，现在有传本可据，是我国最可贵的数学遗产之一。刘徽的《九章算术注》整理了《九章算术》中各种解题方法的思想体系，旁证博引，纠正了其中某些错误，提高了《九章算术》的学术水平；他善于用文字讲清道理，用图形说明问题，便于读者学习、理解、掌握；而且，在他的注释中提出了很多独到的见解。例如，他创造了用"割圆术"来计算圆周率的方法，从而开创了我国数学发展中圆周率研究的新纪元。他从圆的内接正6边形算起，依次将边数加倍，一直算到内接正192边形的面积，从而得到圆周率π的近似值为$\frac{157}{50}=3.14$，后人为了纪念刘徽，称这个数值为"徽率"。以后他又算到圆内接正3072边形的面积，从而得到圆周率π的近似值为$\frac{3927}{1250}=3.1416$。外国关于π取值3.1416的记载最早是印度的阿利耶毗陀（Aryabhato），但他比刘徽晚200多年，比祖冲之晚半个世纪。如果设圆的半径为r，内接正n边形一边长为l_n，边数加倍后$2n$边形一边之长为l_{2n}，那么刘徽由l_n计算l_{2n}的运算可以归纳为下面公式：

$$l_{2n}=\sqrt{\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}。$$

此外，如果设圆的面积为S，内接正n边形的面积为S_n，$2n$边形的面积为S_{2n}，则刘徽已经证明圆的面积S满足以下不等式：

$$S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$$

而S_{2n}可以由下面公式算出：

$$S_{2n}=S_n+\frac{n}{2}l_n\cdot d_n$$

其中

$d_n = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$ 为立于内接正n边形一边上的圆弓形之高。

刘徽认为如此增加圆内接正多边形的边数："割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣。"这里他已把极限的思想应用于近似值的计算，他的方法除了缺少极限表达式外，与现代方法相差无几。他的割圆术只需要计算内接多边形而不需要计算外切多边形，这与阿基米德的方法比较可以说是事半功倍。此外他的极限思想还反映在"少广"章开方术的注释中，以及"商功"章棱锥体体积的计算的注释中。例如，在棱锥体的研究中，他把立方体进行分解，以求棱锥的体积，"若为数以无穷之。置余高袤、广之数各半之，则四分之三又可知也。半之弥少，其细弥细，至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉？"就是逐次分割棱锥体，并求出它们的体积，分割到无穷次，问题就解决了。刘徽堪称我国第一个创造性地把极限观念运用于数学的人，而且运用得相当自如。

刘徽还发现了一条体积计算的定律："由正方形与其内切圆的面积之比为4∶π，推得正方台（锥）与其内切圆台（锥）的体积之比也是4∶π。"

刘徽研究了曲面体体积。尤其是曲体体积的求法。他指出，在一立方体中作两内切圆柱体，其交叉部分形成的特异曲体体积的确定乃是求曲体体积的关键。他经过周密的思考，虽未能解决，但他采取了严肃的态度，决定把它留给后人。他说："敢下阙疑，以待能言者。"刘徽的敏锐观察被继承下来，到5世纪时，终于为祖暅完满的解决了，祖暅获得了一个普遍原理："幂势既同，则积不容异。"后来卡瓦列利也发现了这个原理，因此又称此原理为"卡瓦列利原理"。

刘徽在"方程"章的注释中对二元一次方程组创立了互乘相消法。在"盈不足"章的注释中建立了一个等差级数求和公式。

刘徽还推广了陈子的测日法，撰写了《重差》和《九章重差图》，其内容是对汉代天文学家测量太阳高度和距离方法的论述，这是一部运用几何知识测量远处目标的高、远、深、广的数学著作。唐初时，《九章重差图》失传，现仅存《重差》一册卷。因其所论第一标题是测量海岛的高度和距离等问题，所以又名《海岛算经》。

刘徽主张用十进分数来表无理的立方根近似值。

刘徽是我国古典数学理论的奠基人之一，他的著作堪称中国传统数学理论的精华。

帕波斯 (Pappus)

（约300—350）

帕波斯是希腊亚历山大晚期的数学家，约300年生于亚历山大；约350年卒于亚历山大。

帕波斯的巨著《数学汇编》是一部名副其实的几何宝库，我们关于希腊几何的大部分知识是靠这部巨著，它引用和参考了30多位古代数学家的原著，系统地介绍了古希腊数学家最重要的著作，并附有它们的历史发展过程、已有定理和命题的某些改进和变动以及一些原始材料。其意图是作为原著的索引。每一卷都有系统的序言，明确地指出所论题目的内容及其范围。是一部极珍贵的史料，被誉为“希腊几何学的安魂曲”。这部书共有8卷，但第1卷和第2卷的一部分已失传。

帕波斯在《数学汇编》里，不但对希腊古典时期和亚历山大(Alexander)时期的许多数学著作作了评介，而且还进一步发展了前人的思想，列入了自己研究的成果。

他在第7卷中发表了一个著名定理：平面图形绕同一平面内且不与之相交的轴旋转，所生成的体积等于这个图形的面积乘以图形重心所描画出的圆周长。但他没有给出这个定理的证明。一千多年后瑞士数学家古尔丁(Guldin)重新独立地发现了这一定理，从而后来叫做“古尔丁定理”。古尔丁也没有严格证明，最早的证明是卡瓦列利用不可分原理作出的。

他在第5卷中给出了塞诺多拉(Zenodorus)关于等周曲边形问题的证明、结果和推广。例如，他得出了：周长相等的所有弓形中以半圆的面积最大。他证明了：球的体积比表面积与其相等的任何圆锥、圆柱或正多面体的体积都大。他还阐明了蜜蜂

六棱柱的巢是一种所谓最“经济”的形状，在其它条件相同的情况下，这种形状容积最大。这些问题在18世纪得到了进一步研究。

在他的这部著作中还载有著名的“帕波斯问题——如果从任一点作直线与五条具有给定位置的直线在各个给定角度上相交，并且其中三条直线所围之长方体的体积与其余两条直线和这一给定直线所围之长方体的体积的比是指定的，则该点将落在给定位置的曲线上。如果有六条直线，并且其中三条所构成的上述立体与其余三条所构成的立体的体积之比是指定的，则这一点仍将落在给定位置的曲线上。这个问题之所以著名，是因为笛卡儿（Descartes）曾试图用分析方法解决它，并在几种情况下求出了必须使该点落于其上的曲线，导致他发现了解析几何学的原理。

帕波斯所说的“极小是奇特的性质”，启发了费尔马得出了求极大、极小值的十分巧妙和富有成效的公式。

帕波斯还证明了：与定点（焦点）及定直线（准线）的距离成一定比例的一切点的轨迹是圆锥曲线。在他的著作中出现了属于射影几何范畴的概念：例如，对合、非调和比等。他还证明了圆锥曲线内接六边形的“帕斯卡（Pascal）定理”的特殊情形。

帕波斯是亚历山大最后一位富有创造性的数学家。他的《数学汇编》不但是一部对他那个时代存在的几何著作的综述评论和指南，而且它又使数学家对希腊几何学的兴趣从衰微中重新恢复起来，从而推动了数学的发展。

帕波斯对狄奥多罗斯（Diodorus）的《论天体仪》、托勒密（Ptolemy）《大汇编》、《平球法》和《谐音》以及欧几里得的《几何原本》等书也作了评述。他对托勒密的天文体系的评注，促使了该体系在以后一千多年间的流行和普及。

祖冲之 (Zu Chongzhi)

(429—500)

祖冲之字文远，是我国数学家、天文学家。生于429年（刘宋文帝元嘉六年），卒于500年（南齐东昏侯永元二年），祖籍河北涞源县（原范阳郡遒县）。



祖冲之

祖冲之的祖父任刘宋朝大匠卿（管理土木工程的官吏）。父亲做奉朝请，学识渊博。祖冲之青年时代进入专门研究学术的华林学府钻研古代经典。他勤奋好学，思维机敏，热爱天文、历法，经常观测和记录日月星辰的运行情况。他曾任州从事史，公府参军、县令、长水校尉等官职。

祖冲之一方面博览群书，汲取诸家精髓，同时又不因循旧章，墨守陈规。从而对数学、天文学都作出了杰出贡献。

在数学上：他继刘徽之后对圆周率π的计算达到了更精确的程度，即 $3.141592<\pi<3.1415927$，并定 $\pi=3.14159265$ 为"正率"使圆周率值准确到小数点后7位，是当时世界上最精确的纪录，这个纪录一直保持近一千年，直到1427年才被中亚细亚数学家阿尔·卡西(Al-Kashi)更精确的推算打破。π是一个无理数，为了使用方便，祖冲之用 $\pi\approx\frac{22}{7}$ 称为"约率"，而用 $\pi\approx\frac{355}{113}$ 称为"密率"。这在数学史上具有重大意义。约率虽然早为阿基米

德所得，而密率却是祖冲之首先得到的，比荷兰工程师安托尼兹（Anthonisz）的同一发现要早一千多年。密率 $\frac{355}{113}=$ 3.141592920…，其相对误差只有 $\frac{9}{10^9}$。设直径是10公里，用密率算出的圆周长只比真值大不到8毫米，能达到这样高的精确度，正是祖冲之对数学的卓越贡献。密率$\frac{355}{113}$还便于记忆，因为它的分母分子恰好是三个最小奇数的重复。

祖冲之和他的儿子祖暅在计算球体体积时建立了一条定理："幂势既同，则积不容异"。这在欧洲，一千多年后，才由意大利数学家卡瓦列利提出。

祖冲之和祖暅共同完成的专著《缀术》，在唐代（公元618-907）曾被规定为官学中高级班的教材，学习期限为4年，其博大精深由此可见。可惜"学官莫能究其深奥，是故废而不理"，后来竟在11世纪失传。他的另一数学著作《九章术义注》也已失传。这是我国学术界的重大损失。

祖冲之在天文、历法方面也取得了卓越成就。他考虑了计算日月运行周期的岁差问题，修正了当时所采用的《元嘉历》中的许多错误，编制了《大明历》。为了更符合天象的实际，他还改进了闰法，把19年有7个闰月，改为391年有144个闰月。他首次求出了历法中通常称为交点月的日数为27.21223日，这与近代测得交点月的日数27.21222日仅差不到1秒。

祖冲之还是一位机械制造专家。他曾根据当时农业生产、交通运输的需要，制造了"千里船"和"水碓磨"。制作了结构复杂的指南车。

祖冲之在哲学、文学和音乐上也很有造诣。他注释过"易经"、"论语"、"老子"、"庄子"等古代著作。写过小说《述异记》，还创造了一种为乐器正音用的铜尺。

祖冲之在数学、天文、历法方面的成就，在世界科学史上占有很重要的地位、享有很高的国际声誉：在法国巴黎的“发现宫”科学博物馆的墙上刻有祖冲之的名字及其所计算的π值；在莫斯科大学礼堂的走廊上镶嵌有祖冲之的彩色大理石雕像；现代科学家在月球上命名的重要山川中有“祖冲之山脉”以纪念这位伟大的中国科学家。

布拉德沃丁（Bradwardine，Thomas）

（1290—1349）

布拉德沃丁是英国数学家、神学家。生于1290年；1349年8月26日卒于伦敦兰贝斯。

布拉德沃丁就学于牛津大学默顿学院，后来在该院任学监并教授哲学、神学、数学。1333年起担任教会职务，并曾任英国基督教会中心坎特伯雷的大主教。

布拉德沃丁也许是14世纪英国最著名的数学家，被誉为"万能博士"或"深湛博士"。

布拉德沃丁在他的《几何探索》和《连续的论著》中，讨论了连续量的性质。他曾从连续统问题的角度，考察不可分量论的建议者所代表的各种观点。有些人用物理学的原子论来解释，也有人用数学的观点来解释；有些人假定有限个点，也有些人假定为无限多个点；有些人假定为紧密连接的，也有人以为是不可分量的离散集合。布拉德沃丁则认为连续量虽包含无穷个不可分量，但不是由那些原子所组成。他说："连续统不是由无穷个不可分量积累（integrari）或组成的。"但相反地他又支持一个连续量是由无穷个同类的连续体所组成的理论。他的观点为反对一切原子论的逍遥派的观点所支配，并认为无限只是潜在的。布拉德沃丁的这些观点对中世纪的思想产生了深刻影响。

布拉德沃丁除了关于连续和离散的基本概念以及关于无穷大和无穷小有研究以外，他还是欧洲早期的三角学者，他补写了去欧洲实践时从东方人那里借用来的三角概念的序言，并首先将正切与余切（他当时分别叫做"倒影"与"正影"）引入三角计算之中。他还研究了星形多边形和等周图形，并建立了下述原

理：在等周长的多边形中，角的个数较多的那个多边形具有最大的面积；在顶点数相同的等周长的多边形中，等角多边形的面积最大；在等周长和等角多边形中，如果有相同的顶点数，那么等边多边形的面积最大；在等周长的图形中，圆的面积最大。布拉德沃丁还写了《理论算术》、《圆求积》、《论运动中的速度比》等论著，在这些论著中涉及到数论、“形态幅度”（现称为“质的强度”）等问题。

布拉德沃丁还著有神学论著。在神学方面，他抨击贝拉基（Pelagius）主义，支持奥古斯丁（Augustine）的恩宠论，并将这种理论与上帝的绝对预知联系起来，提出：如果上帝不是无代价地颁赐恩宠，那么上帝就是预见不到自己的行动，因此他的预知就不是绝对的。

奥拉德沃丁1349年死于瘟疫。

奥雷姆 (Oresme, Nicole)

(1325—1382)

奥雷姆是法国数学家、经济学家。约1325年生于卡昂附近；1382年7月11日卒于利雪。

奥雷姆早年在巴黎大学攻读神学，其后在鲁昂、巴黎等地任教，1348—1356年任巴黎大学那瓦尔学院司库，继而任该院院长至1361年。1362年成为牧师。1370年起任法国国王智者查理五世（Charles Ⅴ）的侍从司铎。1377年成为利雪的主教。

奥雷姆对数学和经济学都很有建树。

在数学方面，他写了5部书。其最重要的贡献是对变量的研究。

14世纪牛津和巴黎的经院哲学家开始从量的方面来思考变化和变化率的问题。他们研究匀速运动、非匀速运动以及均匀性的非均匀运动（等加速运动）。当时这一种思想的代表就是奥雷姆所提出的图线原理。关于这个问题他写了《论质量与运动的结构》（约1350年）、《论图线》。为了研究变化与变化率，他按希腊人的传统认识，指出凡可度量的量（除了数以外，因为他认为数是离散的，几何量是连续的）都能用点、线、面来代表。为了表示随时间而变化的速度，他用一水平线上的点代表时间，称之为经度；而不同时刻的速度则用纵线表示，称之为纬度。为表示一个从O处为OA减到B处为零的速度，他画出如右图所示

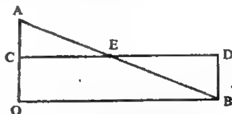


图 11-1　等面积示意图

的一个三角形，并指出由AB中点E所定的矩形OBDC与三角形OAB等面积并表示在同一段时间内的匀速运动。他把物理变化同整个几何图形联系起来。整个面积代表所论的变化，其中不牵涉到数值。奥雷姆的著作中隐含着下述四个思想：（1）用线段来度量各种物理量（如温度、密度、速度）；（2）关于变量之间的函数关系的某种概念(例如把速度看成时间的函数)；（3）这种函数关系的图形表示法，可以看作是向引入坐标系迈进的一步；（4）作为时间——速度图下的面积来计算距离的"积分"法连续求和法。虽然奥雷姆只是在匀加速运动的情况下才有作图方法以完成这种计算。有人认为奥雷姆是坐标几何的创始人，因为在他的著作中可以清楚地看到坐标系发展的步骤。但也有不少人持异议，因为在他的著作中没有指出代数与几何这两者间的本质联系，而且他那些坐标并不是按照某种预先规定的法则点出的。不过奥雷姆上述思想的成熟模型，在17世纪微积分的发展中仍然起着重要作用。其著作得到多次印刷。他的思想可能对伽利略、笛卡儿都深有影响。

奥雷姆对无穷级数也进行过研究。他在《欧几里得几何问题》（约1360年）这本小册子中，给出了几何级数 $\frac{a}{k}+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})+\cdots+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})^n+\cdots=a$，其中$k$是大于1的整数。不过是用下述文字叙述的："如果从一个量a中取出它的$\frac{1}{k}$，再从第一个剩余中取出它的k分之一，然后再从第二个剩余中取出它的k分之一，…这样无限地继续下去，则这个量恰好被取尽，不多也不少。"他甚至证明了调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$是发散的，他用的正是今天的方法，就是代之以一个每项都较小的级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+$

$\frac{1}{8}$)+…，并根据后者是发散的。当然我们不能由此断言奥雷姆已经开始考虑收敛级数与发散级数了。由于他对无穷级数的研究仅限于文字叙述和几何表示，所以没有取得多大进展。他对无穷级数研究的主要贡献，并不在于其所得到的结果，而在于促使人们接受一种新的观念，即在数学中可以自由自在地承认无限过程。他的思想为17世纪的关于无穷级数和无限过程的重要工作开僻了道路。他还发展了古希腊学者有关的极限思想，并且是函数在极值附近变化性质的最早研究者之一。

奥雷姆在《比例算法》（约1360年）中，第一次使用了分指数（自然，不是现代的符号），在这方面他已远远走在同时代数学家的前面。

奥雷姆对运动学（运动的原理和法则）作出了很大贡献。其《天体论》和《天空与世界之书》提出了独特的科学概念。他为了反对妖术和声称能预测未来的占星术士，撰写了《占卜之书》。奥雷姆认为存在着几个宇宙的可能性，反对亚里士多德在《论天空》中提出的诸天体围绕静止的地球运动的理论。他在哥白尼（Copernicus）之前就已认为地球或许在转动，并考虑过在地球绕太阳转动的基础上，同样可以建立一种天文学理论，但他没有来得及构成一种新理论。

在经济学方面，他所著的《货币论》是一部名著，17世纪曾多次再版，此书反对任何使货币贬值的意图。这一著作使他被誉为中世纪最杰出的经济学家。当时法国国王查理曾根据奥雷姆的租税合法论、租税长期存在的必要性并结合稳定货币的必要理论，在财政方面进行了重大改革。

查理五世十分重视书籍，并非常关心对其政府有利的学者，因而特请奥雷姆翻译了亚里士多德的《论理学》、《政治学》、《经济学》等论著。这些译本对法国语的发展起到了重要作用。

史蒂文 (Stevin, Simon)

(1548—1620)

史蒂文是荷兰数学家、工程师。1548年生于布鲁日；约1620年3月卒于海牙（另一说莱顿）。



史蒂文

史蒂文早先任布鲁日的收税官，1583年离职进入莱顿大学深造，后来任公共工程委员会和军队的军需总监，领导了许多公共建筑工程。

史蒂文对数学、静力学、流体静力学都有创见，作为一个工程师和实践家，他非常注意数学的应用。

在数学方面，他是欧洲系统地处理十进制小数最早的一个人。1585年他在小册子《论十进》里，浅显而透彻的叙述了十进小数和十进制的优点。为了表示十进位制符号，史蒂文在每个符号后面加一个圆圈，在圆圈里记上表明小数数位的数字。例如，他把 4.238 写成4 ○ 2 ① 3 ② 8 ③，在这种写法里，用没有数字的圆圈把整数部分与小数部分隔开。他的另一种写法不是把表明数位的符号放在数字之间，而是放在数字的上面，并且不用加圆圈。这种写法，上面的小数可写成$\overset{0}{4}.\overset{1}{2}\overset{2}{3}\overset{3}{8}$。史蒂文还运用自己的符号表示幂的指数。他承认无理数是数，并且用有理数来不断逼近它们。1582年发表了他编的复利计算表。

史蒂文是静力学的奠基者之一。在1586年出版的《静力学与

流体静力学》一书中，他得出了力的三角形定理，这个三角形定理与力的平行四边形法则等价。证明了作用在已知液面上的压力依赖于这个液体的高度及液面的面积，而不依赖于液体容器的形状。在史蒂文的静力学著作中已含有微积分的先声。例如，他用极限方法证明了三角形的重心落在中线上，还给出了一些平面曲边形重心命题的证明，包括抛物线弓形。史蒂文这些证明指出了极限方法在实用方面的发展前景，我们只要在他的方法中稍作改变（主要是进一步算术化并使用更精确的术语），便立刻能得出近代的极限方法。又如，他指出装满水的容器，垂直作用在正方壁上的平均压力等于中点处的压力。对这样一个命题，他给出了一个“数字证明”的实例：他将壁分成4块水平长条，并指出每块上的压力分别大于0，$\frac{1}{16}$，$\frac{2}{16}$，$\frac{3}{16}$个单位，而小于$\frac{1}{16}$，$\frac{2}{16}$，$\frac{3}{16}$，$\frac{4}{16}$个单位，则总压力大于$\frac{6}{16}$而小于$\frac{10}{16}$；若将壁分成10块水平长条，则总压力大于$\frac{45}{100}$个单位，而小于$\frac{55}{100}$个单位；若分成1000块水平长条，则总压力大于$\frac{499500}{1000000}$个单位，而小于$\frac{500000}{1000000}$个单位；当长条的数再增加，他意识到可能使这个比值与$\frac{1}{2}$任意地接近。这样，他证明了压力等于将壁水平地放在深度一半处所受的力，并和观察相符合。如果史蒂文取他的两个序列中的一个，将对壁的连续分割结果作为一个严格的以$\frac{1}{2}$为极限的无穷序列，这个“数字证明”就和近代微积分中给出的叙述完全一致了。

1586年，史蒂文发表了一项实验报告：两个铅球其中一个是

另一个重量的10倍，从30英尺的高度同时自由下落，结果同时着地。从而推翻了亚里士多德所说的："下落速度与落体的重量成正比"的结论。尽管史蒂文这个实验比伽利略论重力的第一篇文章早3年，比伽利略论自由落体的专著早18年，但却鲜为人知，没有受到重视。

史蒂文第一个于1599年求得地球上43处的磁倾角值。同年他设计并制造了挂帆的四轮车，用这种车载28个人沿着海岸行驶，其速度胜过了一匹奔驰的马。他在任军需总监时，设计了一套水闸系统，使得一旦需要时，可以用洪水淹没入侵的敌人。他的这些发明与设计，使他在当时的广大群众中享有盛名。

史蒂文是把丢番图（Diophantus）的著作翻译成近代语言的第一人。并设计了一种装置用以证明永恒运动的不可能性。

史蒂文64岁才结婚，婚后生了两个儿子和两个女儿。晚年他将自己的数学著作重新作了修订，取名《数学论文集》（共2卷）于1605年—1608年出版，不久该论文集还被译成了法文和拉丁文。

伽利略(Galilei,Galileo)

(1564—1642)

伽利略是意大利天文学家、物理学家、数学家、哲学家。1564年2月15日生于比萨；1642年1月8日卒于(佛罗伦萨附近的)阿切特里。



伽利略

伽利略出生于布商家庭，按照其父亲的意愿，1581年进入比萨大学学医。偶然的一次机会听了一堂几何课，课后他专心思考，发现自己也能独立得到阿基米德的结果。他便向父亲请求让他改学数学和自然科学，父亲勉强同意了他的请求。1585年他退学回家，自学4年，主要钻研欧几里得和阿基米德的著作。1586年便发明了测定合金成分的流体静力学秤，1589年写出一篇关于物体重心的论文，引起了学术界的重视，并被聘为比萨大学数学教授，这时他年仅25岁。1592年被聘为帕多瓦大学数学教授。1610年被迈地奇的大公爵科西莫第二(Cosimo Ⅱ)邀请到佛罗伦萨任宫廷首席数学家。由于伽利略拥护并积极宣传哥白尼的日心学说，因而触怒了罗马教皇，1633年2月以“反对教皇，宣传邪说”的罪名，将他判处终身监禁。在监禁期间，他仍坚持科学著述，于1638年写成了《关于力学和局部运动两种新科学的对话和数学证据》，总结了自己一生在力学上的研究成果。晚年，他双目失明，1642年死于幽禁之中，当他逝世时，保守分子拒绝将他埋在圣地。

伽利略是第一个借助望远镜认真观察太阳、月亮和星星的人。他发现了月亮上的山、金星的相位、土星的环、木星的四个卫星、太阳黑子和太阳的自转，以及银河由无数恒星所组成。他的这些发现开辟了天文学上的新时代。

伽利略是开创经典力学和实验物理学的先驱。他发现了物体的惯性定律、单摆振动的等时性、抛物体运动规律，并确定了伽利略相对性原理。他推翻了亚里士多德关于"物体落下的速度和重量成比例"的学说，建立了落体定律。他还对基本运动概念，如速度、加速度等，提出了严格的表达方式。他的工作是力学全面革新的开始并为牛顿力学的诞生开辟了道路。他是"实验力学"的奠基人。

伽利略是第一个近代声学的研究者。他提出一种声波理论，并且开展音调、谐音和弦振动的研究工作。他的这项研究被梅森(Mersenne)和牛顿(Newton)继承下来，成为18世纪数学发展的重要源泉。

伽利略对数学作出过杰出贡献。他相信自然界是用数学设计的，他认为任何科学分支都应通过建立数学模型来进行研究。从而开创了科学实验与数学相结合的新途径——"实验数学"。伽利略的"实验数学"本质上，是在所研究的现象中，找出一些可以度量的因素，并将数学方法应用到这些量的变化规律中去。其具体方法可归结为：(1)从所要研究的现象中，选择出若干可以用数量刻划的因素；(2)提出一个假说，用以建立起观察量之间的数学关系式；(3)从这个假说，即建立的数学关系式推出某些能够实际验证的结果；(4)进行实验，观测——改变条件——再观测，并把观测结果尽可能地用数值表示出来；(5)以实验结果肯定或否定所提的假说；(6)以肯定的假说为起点，提出新假说，再度使新假说接受检验。"实验数学"的最突出的特点，是所提的假说必须是数学化的假说。伽利略明确提出：自然科学应用数学形式来描述。他在《关于力学和局部运动两种新科学的对

话和数学证据》中，几乎从头到尾包含着函数的概念，不过他是用文字和比例的语言表达函数关系的。以后他又首先将落体距离的叙述写为$s=kt^2$，关于沿斜坡下滑时间的叙述写为$t=kl$。他在处理匀加速运动的问题时，给出论据证明：在速度-时间的曲线下的面积就是距离。这个问题使他的学生托里切利（Torricelli）从特殊例子中认识到：变化率问题本质上是面积的逆问题。他是德谟克利特原子论的拥护者，他把面积看成是由无穷多个不可分的单位堆积而成的，他的这种不可分的思想，对他的学生卡瓦列利提出不可分法的原理有很大影响。在伽利略的著作中还有对无穷大与无穷小的某些性质的描述。例如，关于无穷集合等价的观念，他还看出所有正整数的集合可以与所有正偶数的集合一一对应。这些思想对19世纪康托尔（Cantor）的集合论与超限数理论的形成有着深远的影响。伽利略是最先注意到摆线的人之一，并曾建议用之于桥拱，他求出了摆线一个拱下面的面积并发现了对摆线作切线的方法。他的这些工作，也启发了数学家们去考虑摆线绕各种不同的轴转动所得到的旋转面和旋转体。

伽利略是一位伟大的哲学家。他反对教会的经院哲学，他要求从具体的实验研究中去认识自然规律，他认为经验是知识的唯一泉源。他承认世界的客观性、宇宙的无限性和物质的永恒性。他的哲学思想主张对自然界的认识应当坚决同主观臆测的、迷信的看法决裂。他竭力赞成力学和数学的科学观点。

伽利略是历史上最伟大的科学家之一。他曾说：“科学的唯一目的是减轻人类生存的苦难，科学家应为大多数人着想”。他的功绩不仅在于他建立了种种正确的原理，而且在于他勇于推翻种种有害的学说。他远见卓识清楚地看到当时科学观点中的重大错误和缺点。他彻底地抛弃了旧有的思维框架，坚定而明确地制定了自己科学的程式。他是近代科学方法论的奠基人。著名哲学家霍布斯（Hobbes）把他誉为“第一个给我们打开通向整个物理领域大门的人。”

伽利略于1633年曾以宣扬异端邪说罪被推上宗教法庭受审。他的《关于两大世界体系的对话》直到1835年才从天主教的查禁书刊中解放出来。1965年，罗马教皇保罗六世（Paul Ⅵ）在一次出访比萨时也赞扬了伽利略的科学精神和贡献。1983年由不同宗教信仰的世界著名科学家组成一个委员会（这个委员会由6名诺贝尔（Nobel）奖金获得者担任委员，其中有美籍中国物理学家杨振宁博士、丁肇中博士）专门研究科学同宗教信仰的关系，伽利略案件的反科学性以及伽利略学说对现代科学思想的贡献。根据这个委员会讨论的意见，罗马教廷正式承认350年前宗教裁判所对伽利略的判决是错误的。真理终究战胜了强权，伽利略案件的平反昭雪再一次说明："一时强弱在于力，千秋胜负在于理。"

开普勒(Kepler, Johannes)

（1571—1630）

开普勒是德国天文学家、数学家。1571年12月27日生于符腾堡州魏尔德施塔特；1630年11月15日卒于巴伐利亚州雷根斯堡。



开普勒

开普勒出生于一个新教徒家庭，父亲酗酒成性，后又入伍当兵。开普勒自幼体弱多病，5岁又染天花，几乎夭折，留下满脸麻子，眼睛受损，视力低下，双手残疾，还经常受高烧折磨。可贵的是，这些不幸并没有使他意志怯懦，相反的他在事业和人生的征途中历经磨难，身残而志坚。他青年时在符腾堡的德语学校和拉丁语学校学习，1588年进入图宾根大学，并在数学和天文学教授迈克尔（Michael）的指导下研究哥白尼的天文学，成为哥白尼学说的忠实信徒。1591年获硕士学位，1594年任奥地利的格拉茨大学讲师，1598年前往布拉格并在那里结识了天文学家第谷·布拉赫（Tycho Brahe）且成了他的助手，1601年第谷逝世后，开普勒继承了第谷的工作。

开普勒在天文学上的贡献是奠定了天体力学的基础。他利用第谷多年积累的观测资料，进行了分析、研究，发现了行星运动三定律：（1）椭圆轨道定律——行星轨道呈椭圆形，太阳在一个焦点上；（2）相等面积定律——在相等的时间内，行星和太阳联线所扫过的面积是相等的；（3）调和定律——行星公转周期的平

方与椭圆轨道的半长轴的立方成正比例，这三条定律为后来牛顿发现万有引力定律和创立现代天体力学打下了基础。开普勒还创立了大气折射理论，并根据这一理论提出了天体望远镜即折射望远镜的原理。他还编制了恒星表。

开普勒不但是著名的天文学家，而且是杰出的数学家。

他是微积分的先驱者之一，他冲破古板的思想束缚，在“大自然甚至无须推理，而只凭本能教导几何”的信念下，发展了他的富于想象的不可分量的思想，系统地用无穷小方法计算面积和体积。用无数个同维的无穷小元素之和来确定面积和体积是开普勒方法的精华。他的方法的要点是：第一，把给定的几何图形分成无穷多个无穷小的图形，用某种特定的方法把这些图形的面积或体积加起来便得到给定的图形的面积和体积，第二，几何图形是由同样维数的不可分量（即无穷小面积或体积）组成。例如，他将圆看做边数为无限的多边形，把圆的面积看作无限多个无限小三角形的面积组成，多边形的边就是无限小三角形的底，圆心就是无限小三角形的顶点，从而全部面积等于圆周与边心距（即半径）乘积的$\frac{1}{2}$。他将球看作由无限个无限小的锥体所组成，锥的顶点是球的中心，底面构成球的表面，从而指出球的体积是半径与球面积乘积的$\frac{1}{3}$。他将锥和柱看作由无穷多个薄圆片组成，或看作无穷多个从轴引出的无限小楔形体组成，或看作由具有其它形状的垂直截面或斜截面组成，并应用这种观点计算其体积。他还令圆绕一直线旋转，并用无限小方法计算由这样产生的圆环的体积。他令弦所截出的部分圆绕弦旋转，依据截面大于或小于半圆，得到了形象地称为苹果形或柠檬形的体积，并用无限小方法计算了这种以及其它立体的体积。他的这些方法，系统的陈述在他的名著《酒桶新立体几何》之中，这本著作被誉为所有历来求体积方法的灵感源泉，特别对卡瓦列利和沃利斯(Wallis)

有过深刻的影响。开普勒的一些求和法对于后来积分运算的结果也有显著的影响，例如，他在1609年发表的著作《新天文学》中，有类似于用现代符号表达的公式$\int_{0}^{\theta}\sin\theta d\theta = 1-\cos\theta$的计算。还有相当于椭圆积分的近似计算，当椭圆的半轴分别为a和b，则椭圆的近似周长为$\pi(a+b)$。

酒桶的测量，对开普勒提出了决定最佳比例问题。这个课题启发他考虑了很多有关极大与极小问题。在《立体几何》一书中，在论一系列问题中，他指出球内所有以正方形为底的内接平行六面体中，以立方体体积为最大。所有有公共对角线的正圆柱中，当直径和高之比为$\sqrt{2}$时体积取最大。这些结果是通过列出表格而获得的，即是对给定的长、宽、高的值列出体积的值，从这里选出最佳的比例。他从表的观察中得到一个有意义的事实，当体积接近极大值时，由尺寸的变化所产生的体积变化将越来越小。这已经接近于得出极值点处的一阶导数为零这一结论，这个结果不久为费尔马获得。

开普勒还建立了所谓连续性原理，实质上是提出了一个公设：在平面上无穷远处存在某些理想点和一条理想线，它们具有普通点和线的许多性质。于是，他说明了：一条直线可被认为闭合于无穷远点处，两条平行直线应被认为相交于无穷远处，抛物线可看作是椭圆或双曲线的一个焦点退到无穷远处的极限情形。这些观念给予后世几何学家以很大的启发。他对多面体也作过深入地研究：他可能是认识反棱柱的第一人；他发现了半正多面体(cuboctahedron)，斜方十二面体和另一种斜立方体；四种可能的正星形多面体中，有两种是他发现的。他率先研究正多边形(不一定都一样)填满平面和以正多面体填满空间的问题。

开普勒在探索问题时，爱用类比的方法。他曾说："我珍视类比胜于任何别的东西，它是我最可信赖的老师，它能揭示自然界的秘密，在几何学中它应该是最不容忽视的。"

开普勒写过一本书名叫《梦》的小说，讲的是一个人在梦中到月亮旅行，把月亮表面第一次如实地描述出来。因此《梦》是一本科学幻想小说。

开普勒一生坎坷，青少年时代病魔缠身；婚后生活也非常不幸，第一个妻子死于疯病，爱子死于天花；他第二次结婚比第一次还要不幸，虽然他十分认真地比较了11个姑娘的长短，结果还是挑错了对象；他作为一个新教徒，当格拉茨城落入天主教徒之手时，他被解除了格拉茨大学讲师职务；他的母亲也被指控为巫婆遭到监禁，他几乎花了一年的时间到处奔走以救母亲出狱，自己也差点被定上了异端邪说的罪名；他的薪俸总是迟迟不发，1630年在索取长期拖欠的工资的旅途中染病去世，在生命垂危之际，他写了两句豪迈而悲壮的诗交给他的女婿和好友，希望以这首诗作他的墓志铭。他写道：

“我曾神算天机，
还又妙测大地。
而今灵魂升天，
身躯留此安息。”

古尔丁(Guldin, Paul)

(1577—1643)

古尔丁是瑞士数学家，1577年6月12日生于瑞士圣加尔，1643年11月3日卒于奥地利格拉茨。

古尔丁是一位当作新教徒抚养起来的犹太后裔。最初他在德国的一个小镇上当金饰匠，20岁时改信天主教，成为一名耶酥教徒，并把自己原来的名字哈巴卡克(Habakkuk)改为保罗(Paul)。1609年，他被送到罗马去学习深造，后来在罗马和格拉茨的耶酥学校教授数学。由于一场重病使他停止授课，被送到威尼斯。不久便在那里的大学当上数学教授。1637年他又重返格拉茨继续任教，直到1643年逝世。

古尔丁的主要工作是关于无穷小的研究，他的代表作是《关于重心》(1635—1641年)，这部著作共有4卷。在第1卷中，古尔丁测量了平面直线与曲线、空间曲线的重心。在这一卷的附录中还列有从1到100000所有自然数的平方表和立方表。在第2卷中载有一个重要定理——平面图形绕同一平面内且不与之相交的轴旋转，所生成的立体体积等于这个图形面积乘以图形重心所描画出的圆周的长，这个定理在现在的微积分教程中叫做古尔丁定理。在第3卷中，古尔丁确定了圆锥、圆柱、球以及一些旋转体积和表面面积以及它们相交部分的体积和表面积的计算方法。在第4卷中，古尔丁针对开普勒应用无限小和卡瓦列利在其《不可分量几何》(1635年)中应用不可分量所表现出的不严密性进行了猛烈抨击。古尔丁这部著作虽然是按照阿基米德的思维框架写成，但他在计算重心等问题时，仍应用了无穷小量的思想，而且由于下述两件事情使得他在微积分学发展史中颇为出名：第一，

在不少微积分教程中，以他的名字命名的前述那个古尔丁定理，其实早就出现在帕波斯的《数学汇编》中，故有人认为古尔丁剽窃了帕波斯的成果。但也有人认为这个定理是古尔丁独立得到的，如果说有关系，只不过是这两人之间灵感上的联系而已，从而在学术界发生了争论。不过古尔丁也只是对这个定理作了“形而上学”的叙述，而没有证明，最早的证明还是卡瓦列利应用“不可分原理”给出的。第二，古尔丁是当时对开普勒应用无限小和卡瓦列利应用不可分量缺乏严密性的主要批评者，古尔丁的批评引起了卡瓦列利和不少学者的重视。

古尔丁发表的第一篇论著是有关格雷戈里历的争论，发表于1618年。他在1622年还发表了一篇有关地球运动和重心的物理数学方面的论文。他在1622年发表的另一著作《有关组合的四则问题》里包含了组合分析的萌芽。

笛卡儿（Descartes, Rene）

（1596—1650）

笛卡儿是法国数学家、哲学家、物理学家、生理学家。1596年3月31日生于图伦省拉埃耶（今称拉埃耶—笛卡儿），1650年2月11日卒于瑞典斯德哥尔摩。



笛卡儿

笛卡儿生于一个富有的律师家庭，年仅1岁母亲就去世了。他自幼体弱多病，患有慢性气管炎，被允许早晨在床上读书，养成了宁静好思的习惯。1612年从法国最好的学校之一——拉费里舍的耶酥会学校毕业，同年去普瓦捷大学攻读法学，1616年获该校博士学位。取得学位之后，他就暗下决心：今后不再仅限于书本里求知识，更要向"世界这本大书"求教，以"获得经验"，而且要靠理性的探索来区别真理和谬误。

此后，他背离家庭的传统职业，开始探索人生之路。自1618年起，先在军队里当过几年兵，离开军队之后便到德国、丹麦、荷兰、瑞士、意大利等国游历，所见所闻丰富了他的见识，更重要的是对当时科学的最新成果增强了解。1628年定居荷兰，在那里生活了20年，写出了哲学、数学和自然科学一系列著作。

笛卡儿是欧洲近代哲学的主要开拓者之一，他主张抛弃中世纪以来的神学世界观，声称一切知识只有经过合理的鉴定，才能得到逻辑上的承认。他先后出版了《形而上学的沉思》和《哲学

原理》两本名著，前者是关于物理学的主要基础，后者主要是阐述他在物理学和生物学方面的研究成果。由于其观点触犯了经院哲学和教会的教义，因而受到教会的迫害，这些著作也被列为当时的禁书。然而他的哲学思想受到很多人的推崇，黑格尔（Hegel）称他是“现代哲学之父”。他是将哲学思想从传统的经院哲学束缚中解放出来的第一个人，是唯理论的创始人。“我思故我在”是笛卡儿举起的唯理主义大旗的核心，他号召人们用“怀疑”的手段代替盲从和迷信，人们只有依靠理性才能获得真理。

笛卡儿对数学的最大贡献是创立了解析几何学。他认为数学比其它科学更符合理性的要求。他是以下列三种身份的结合来研究数学的，作为哲学家、作为自然界的探索者、作为一个关心科学用途的人。他的基本思想是要建立起一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来。他曾说：“我决心放弃那种仅仅是抽象的几何，这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思维的问题。我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何。”为此他写了《几何学》。他的《几何学》是作为1637年他的《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》一书中第三个附录中出现的（一本书的附录比书的正文更重要、更有名，在科学史中是不多见的。另一个例子是两个世纪后波尔约（Bolyai）的一个关于非欧几何的附录），其它两个附录是《折光》和《大气现象》。笛卡儿在《几何学》所阐发的思想，被弥尔（Mill）称做“精密科学进步中最伟大的一步。”

笛卡儿的理论以两个观念为基础：坐标观念和利用坐标方法把带有两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线。他的《几何学》共分三个部分：第一部分包括对一些代数式作几何的原则解释，在这一部分中，笛卡儿把几何算术化了；第二部分讨论了曲线的分类法以及作曲线的切线的方法；第三部分涉及高于二次方程的解法。指出了，方程可能有和它的次数一样多的根，还提出了著名的笛卡儿符号法则。在他的《几何学》中第一次出

现变量与函数的思想，不过没有使用这两个术语。笛卡儿所谓的变量，是指具有变化长度而不变方向的线段，还指连续经过坐标轴上所有点的数字变量。正是变量的这两种形式使笛卡儿试图创造一种几何与代数互相渗透的科学。笛卡儿的功绩是把数学中两个研究对象“形”与“数”统一起来，并在数学中引入“变量”，完成了数学史上一项划时代的变革。对此恩格斯给予了极高的评价：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。”

应该指出，笛卡儿的坐标系是不完备的，他未曾引入第二条坐标轴，即y轴，y轴是由18世纪的瑞士数学家克拉美(Ctamer)在他的著作《代数曲线分析引论》中引入的。另外笛卡儿也没有考虑横坐标的负值。

笛卡儿对韦达所采用的符号作了改进，他用字母表中开头几个字母a，b，c等表示已知数，而用末尾几个字母x，y，z等表示未知数，这种表示法一直沿用至今。笛卡儿还最先得出凸多面体顶点数V、边数E和面数F之间存在的关系：$V-E+F=2$。他又是最先讨论所谓笛卡儿叶形线的。在他的通信中发现，他还考虑过高次抛物线（$y^n=px$，$n>2$），并且给出了作摆线切线的相当精巧的方法。

笛卡儿孜孜不倦、勤于思考，他不喜欢读带有详细解释的科学论著。他读书的方法，是把书拿来后，先弄清作者的主要意图，他只读完开头部分，而那些应由作者得出的结论，他总是力求自己得出。他认为这种方法是值得所有读者效仿的，为此他自己的著作总是阐述得很简洁。例如，他在《几何学》开头部分的某一页上写道：“我不准备比较详细地叙述，因为那样会使你们失去独立分析的愉快，会使你们的头脑失去在进行这种练习时所得到的好处。这种好处，依我看，是能从这门科学中吸取到的主要的好处。”

笛卡儿认为科学的本质是数学。他强调科学的目的在于"造福人类"，使人成为自然界的"主人和统治者"

笛卡儿终生未娶。瑞典女王克里斯蒂娜(Christina)，为了有哲学家的侍奉以光耀她的宫庭，1649年邀请笛卡儿为她讲授哲学，女王要求每周三天早晨五点钟为她上课。在瑞典的冬季寒冷的早晨，每周三次乘马车去王宫，对于肺部不太健康且有晚起习惯的笛卡儿来说简直太不适应了，这个冬天还未过去，他就不幸死于肺炎。在教会控制下的学术界，对笛卡儿的逝世十分冷淡，只有几个友人为他送葬。随着笛卡儿的数学和哲学思想影响的扩大，法国政府在笛卡儿去世后18年，才将其骨灰运回安葬在巴黎名人公墓。1799年又将其骨灰厝置于历史博物馆，1819年移入圣日耳曼圣心堂中，其墓碑上刻着："笛卡儿，欧洲文艺复兴以来，第一个为争取并保证理性权利的人。"

笛卡儿有一句名言："天下之理，非见之极明，勿遽下断语。"他还强调："没有正确的方法，既使有眼睛的博学者也会象瞎子一样盲目探索"。

卡瓦列利（Cavalieri, Bonaventura）

（1598—1647）

卡瓦列利是意大利数学家。1598年生于米兰；1647年11月30日卒于波伦亚。



卡瓦列利

卡瓦列利出生于一个贵族家庭，15岁时被接纳加入宗教团体“耶稣团”，18岁入比萨修道院。在该修道院中，他有幸遇到一位曾经和伽利略一起研究过数学的僧侣卡斯泰利。在卡斯泰利的指导下，他对希腊数学家的有关著作进行了研究，并经卡斯泰利的介绍，认识了伽利略，并且建立了通信联系，他自称是伽利略的学生。卡瓦列利在修道院讲授神学并担任过修道院院长，而且以学识渊博著称。由于对数学的浓厚兴趣，他希望到大学去研究和讲授数学。在伽利略的大力推荐下，他31岁时终于如愿以偿。从1629年起直到逝世，他就一直任波伦亚大学的数学教授。

卡瓦列利对数学的最大贡献是建立了“不可分原理”。在开普勒和伽利略的影响下，他把源出于经院哲学的“不可分量”的观念，发展成为几何方法。并于1635年发表了名著《用新方法促成的连续不可分几何学》。卡瓦列利认为，几何图形是由无数多个维数较低的不可分量组成的，即面积是无数个等距平行线段构成的，体积是无数个平行的平面面积构成的；他分别把这些元素叫做面积和体积的“不可分量”。并承认组成面积或体积的不可

分量的数目一定是无穷大的，但他不想在这一点反复推敲。粗浅地说（正如他在1647年出版的《六道几何练习题》中指出的），不可分法认为线是由点构成的，就象项链是由珠子穿成的一样；面是由直线构成的，就象布是由线织成的一样；立体是由平面构成的，就象书是由纸页组成的一样。不过，它们是对无穷多个组成部分来说的。他首先在两个给定的几何图形的不可分微元之间建立起一一对应关系，如果两个给定图形的对应的不可分量具有某种（不变的）比例，便可断定两个图形的面积或体积也具有同样的比例。这种方法所依据的一个原理现在仍称为卡瓦列利原理："同高立体中，同高截面有相同比k，则体积比为k。"（这个原理，我国数学家祖暅比卡瓦列利早一千多年就得到了，所以应称祖暅原理）他运用这个原理证明了圆锥的体积是外接圆柱体积的1/3。

卡瓦列利的不可分原理，不仅对初等几何作出了有意义的直观解释，给出了计算面积和体积的有效方法；而且这种用不可分求和的原理就是尔后的定积分概念的雏型。他的方法明显地隐含着计算面积和体积的求极限过程，他算出了相当于形如 $\int_0^a x^m dx$ 的积分值（m是正整数），并使用不可分原理证明古尔丁定理。他还最先使用极坐标来求阿基米德螺线下的面积。从他的《用新方法促成的连续不可分几何学》中，还可以发现应用微分概念求极值的某些定理。例如，该书的第一个命题就包含着与罗尔(Rolle)定理等价的推断。

卡瓦列利的"不可分量"有点象图形的原生部件。他的不可分原理由于缺乏逻辑上的严密性，引起同时代一些数学家的异议，对他抨击最激烈的是瑞士数学家古尔丁。卡瓦列利试图通过改造自己的方法来排除各方面的非议，但未获成功。有时他宣称这种方法只是为避免"穷竭法"而采用的一种方法，并强调这一方法能够引向新的创造。事实也是如此，他的《用新方法促成的连续不可分几何学》与《六道几何练习题》的发表，鼓舞了许多数学

家，特别是法国数学家，使他们能够用比较容忍的态度去对待无穷小量的概念，以更抽象的方式去研究更为普遍的问题。卡瓦列利的这两本著作成为后来研究几何学中无穷小问题援引最多的文献，而且系统地用无穷小方法计算面积和体积也是通过这两本书而得到推广的。他的不可分量在后来牛顿的瞬时概念和莱布尼茨的微分概念中都有所反映。因此，卡瓦列利的理论是通向无穷小和微积分学的阶梯。从某种意义上讲，新的分析学是从他的《用新方法促成的连续不可分几何学》开始的。

卡瓦列利还写有《取火镜、圆锥曲线论》（1632年）、《平面和球面三角学、线性和对数三角学》(1643年)《一百道杂题》（1639年）、《天体测量常用指南》（1632年）等著作。他是最早认识对数价值的人之一，也是对数在意大利的最先传播者。

卡瓦列利是17世纪意大利最有影响的数学家，是微积分学的重要先驱。

费尔马 (Fermat, Pierre de)

（1601—1665）

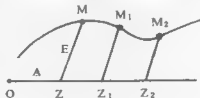
费尔马是法国数学家。1601年8月20日（另一说17日）生于图卢斯附近的波蒙特；1665年1月12日卒于卡斯特尔。



费尔马

费尔马出生于皮革商人家庭，他在家乡上完中学后，考入了图卢斯大学，1631年获奥尔良大学民法学士学位，毕业后任律师，并担任过图卢斯议会议员。虽然数学只是他的业余爱好，但他对解析几何、微积分、数论、概率论都作出了杰出的贡献，被誉为“业余数学家之王”。

费尔马是解析几何的两个发明者之一。在笛卡儿的《几何学》发表之前，他在1629年就已发现了解析几何的基本原理。他考虑任意曲线和它上面的一般点M（如下图）：M的位置用A、E两个字母定出：A是从点O沿底线到点Z的距离，E是从Z到M的距离。他所用的是倾斜坐标，但y轴没有出现，而且不用负数，他的A、E相当于现在用的x、y。



费尔马叙述了他的一般原理：“只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们就得到一条轨迹，这两个量之一，其末端就绘出一条直线或曲线”。图中对于不同位置的E，其末端M、M_1、

M_2…就把“线”描出。费尔马采用韦达的代数符号给出了直线和圆锥曲线的方程。他还领会到坐标轴可以平移或旋转，并给出一些较复杂的二次方程及其化简后的形式。他肯定：一个联系A和E的方程，如果是一次的就代表直线，如果是二次的就代表圆锥曲线。他还提出了许多以代数方程定义的新曲线，例如，曲线$x^m y^n = a$，$y^n = ax^m$和$r^n = a\theta$，现在仍被称作费尔马的双曲线、抛物线和螺线。费尔马在1643年又谈到了空间解析几何，他谈到柱面、椭圆抛物面、双叶双曲面和椭球面。他在1650年的一篇文章中指出，含有三个未知量的方程表示一个曲面。

费尔马是微积分学的先驱者之一。他在1629年就获得了求函数极值的法则。他的法则可用现在的记号表示如下：欲求$f(x)$（费尔马先取个别整有理函数）的极值，先把表达式$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$按h的乘幂展开，并弃去含h的各项，再令所得的结果为零，这时方程的根就可能使$f(x)$在这一点上有极值。他还应用类似的方法求出平面曲线$y=f(x)$的切线，实际上他是写出了所谓次切线的表达式$\frac{f(x)h}{f(x+h)-f(x)}$，约掉$h$后再弃去含$h$的各项。费尔马在这两个问题中的计算，都用到了相当于求极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$的式子。他的求极值的法则给出了（可微函数的）有极值的必要条件$f'(x)=0$，而所谓次切线的求法导至求表达式$\frac{f(x)}{f'(x)}$的结果。他还用类似的方法求出了抛物体体积的重心，这有别于用求积方法求得的重心，在微积分史上是独特的。他还有区分极大和极小的准则，并有求拐点的方法。费尔马在讨论抛物线$y=x^n$（n为正整数）下的面积时，以等距离的纵坐标把面积分成窄长条，算出了相当于x^n的积分。后来他在横坐标做成几何级数的那些点上引出纵坐标而把他的结果推广到n为分

数与负数的情形，同时那些近似于 ydx的长条面积组成容易求和的几何级数，其结果当$n>0$时，相当于$\int_0^a x^n dx$ 的计算，当 $n<-1$,$a>0$时，相当于今天的广义积分 $\int_a^\infty x^n dx$的计算。他还得出了求半立方抛物线长度的方法。他用这种方法处理了许多几何问题，例如，求球的内接圆锥的最大体积、球的内接圆柱的最大表面积等。费尔马这些成果对后来微极分的建立产生了深远的影响。正如牛顿所说：“我从费尔马的切线作法中得到了这个方法的启示，我推广了它，把它直接地并且反过来应用于抽象的方程。”

费尔马振兴了数论的研究。他对数论的研究是从阅读丢番图的著作《算术》一书开始的，他对数论的大部分贡献都批注在这本书页的边缘或空白处，有些则是通过给朋友的信件传播出去的。例如，费尔马在丢番图著的《算术》第二卷第八命题——“将一个平方数分为两个平方数。”的旁边写道：“相反，要将一个立方数分为两个立方数、一个四次幂，分为两个四次幂，一般地将一个高于二次幂分为两个同次幂，都是不可能的。关于此，我确信已发现一种美妙的证法，可惜这里的空白处太小写不下它。”这就是数学史上著名的费尔马大定理。这个定理可用现代的术语简述如下：

不可能有满足

$x^n+y^n=z^n$，$xyz\neq 0$，$n>2$的整数 x，y，z，n存在。在数论这个领域中，费尔马具有非凡的直觉能力，他提出了数论方面的许多重要定理，但他对这些定理只是略述大意，很少给出详细证明。对这些定理的补充证明曾强烈的吸引着18世纪和19世纪许多杰出的数学家，从而推动了19世纪数论的发展。“费尔马大定理”提出以来虽然三百多年过去了，其间最优秀的数学家都未能给出一般性的证明。但在试图证明这个定理的过程中，却创造出大量新颖的数学方法，引出了不少新的数学理论。所以希尔伯特（Hilbert）称它是“会下金鸡蛋的老母鸡。”直到1983年，西德青年数学家伐尔廷斯（Faltings）证明了莫德尔（Mordell）猜

想之后，才知道："费尔马大定理"不成立的情况至多只有有限个。使这个问题的解决取得实质性进展，但仍未彻底解决。

费尔马还同帕斯卡共同发展了概率论。

费尔马研究了几何光学，并在此基础上于1657年发现了光的最小时间原理及与光的折射现象的关系。这是走向光学统一理论的最早一步。

费尔马性情谦抑，好静成癖。他对数学的许多研究成果都不愿发表。（他的儿子在他去世后，才将其著作、信件、注记汇集成书出版。）这不但使他当时的成就无缘扬名于世，并在他的暮年也脱离了数学研究的主流，所以直到18世纪费尔马还不太知名。然而进入19世纪中叶，随着数论的兴起，数学家和数学史家对费尔马及其著作产生了浓厚的兴趣，争先发表研究费尔马的著作，其中尤以查尔斯·亨利（Cherles Henry）和保罗·坦纳（Paul Tannery）的4卷论文集最为全面，从中可以看出费尔马对数学和光学所作出的广泛而杰出的贡献。

罗伯瓦 (Roberval, Gilles Personee de)

(1602—1675)

罗伯瓦是法国数学家。1602年8月8日（另一说10日）生于比乌外斯；1675年10月27日卒于巴黎。

罗伯瓦1627年赴巴黎，在那里结识了许多学者，并参加了梅森的数学集团。1632年起任巴黎法兰西学院数学教授直到逝世。1666年，法国科学院成立时，他是该院第一批院士。

罗伯瓦是开创微积分学的先驱者之一。以作曲线的切线的方法和以对高次平面曲线的研究而闻名于世。他考虑一种曲线：它是由这样一个动点生成的，其运动由两个已知运动结合而成。于是，两个已知运动的速度矢量的合成矢量给出此曲线之切线。即罗伯瓦从运动的角度出发，将切线看作描画这曲线的运动在这点的方向。这种观点至今在力学中仍然有着实际意义。他利用速度求曲线的切线的方法，虽然是托里切利提出来的，但却是由罗伯瓦作了系统的阐述和应用。通过速度合成的平行四边形法则，他求出了有已知焦点的圆锥曲线的切线、蚌线的切线，以及阿基米德螺线、摆线和其它曲线的切线。应当指出，他在解与切线的有关问题时，也含混地把切线的方向与曲线的方向、该曲线上点的运动方向完全等同起来。他曾和托里切利、笛卡儿就切线问题产生过激烈的论战，其中也包括优先权的争论。但不管怎样，他的切线作法是走向微积分学的明显一步。

罗伯瓦对求积问题钻研甚久，并曾试图摆脱卡瓦列利方法中的那些明显的缺点。他认为，一条线不是由点构成，而是由无限条细小线段构成；一块面不是由线构成，而是由无限多个的小块的面构成；一个立体不是由面构成，而是由无限小体构成。这些

"无限多的东西"则被看作"好比是不可分量"。他遵循着这一思路，得出与 $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ （n为正整数）等价的命题，证明了摆线下的面积为其母圆面积的三倍，求出了正弦曲线的一段弧下的面积，以及这段弧线绕着底旋转后产生的立体的体积，并且求出了摆线一个拱的长度与摆线有关的体积和面积的形心等。他的作品虽以《不可分法论》（此书所注日期1634年，但直到1693年才出版）命名，但他却把自己的方法叫"无穷大法"，罗伯瓦讲过：他曾专心地研究过"天才卓越的阿基米德"的著作，经过这样的研究，自己解决了"卓越的，但从未享到别人足够赞赏的无限大学说"。罗伯瓦和阿基米德不同，他是用无限大的概念代替了穷竭法，不过还没有明显地形成极限的概念。然而罗伯瓦确实提供了定积分概念中一些实质性的要素，因为他把一个图形分成许多微小部分，让它们的大小不断减小，而在这样做的过程中，主要用的是算术方法，结果则由无穷级数的和给出。他的方法和在卡瓦列利著作中所见到的那种具有几何特征的固定不可分量，大不相同。在罗伯瓦的著作中他灵活地应用了各种无穷小元素，例如，无限小的三角形、平行四边形、平行六面体、圆柱、同柱圆柱壳体等。所有这些都蕴含着极限的思想，只是隐蔽在其不可分量方法的术语后面。在《不可分法论》中，他解决了一个关于圆柱与球相截的有趣题目：球心在圆柱的表面上、半径等于圆柱底面直径的球截出的圆柱表面那部分面积，等于球半径平方的4倍。

由于他的《不可分法论》，是在微积分本身已经为世人所知以后的1693年出版的，所以很难估计他对同时代数学家研究有多大影响。不过对年青的帕斯卡可能产生过较大的影响，因为帕斯卡的父亲是罗伯瓦的密友。

罗伯瓦还写下力学方面的著作，设计出一种以他的名字命名的天平。他还做过真空的著名实验。从1634年开始，他主持皇家

学院的拉姆（Ramus）讲座，并保持讲座席位达40年之久。罗伯瓦与同时代学者有着广泛的交往，这对数学的交流起着积极的作用。

托里切利 (Torricelli, Evangelista)

(1608—1647)


托里切利

托里切利是意大利数学家、物理学家。1608年10月15日生于法恩扎；1647年10月25日卒于佛罗伦萨。

托里切利出生于贵族家庭。1628年开始在罗马学习数学。在伽利略的著作启发下，他写了一篇论文《运动论》，论文引起了伽利略的注意。1641年被邀请到佛罗伦萨会见已经双目失明的伽利略，并在伽利略生命的最后三个月成为他的秘书和朋友。1642年伽利略去世后，他继伽利略之后成为佛罗伦萨的宫廷数学家。

托里切利对几何学的研究促进了微积分的发展，他充分认识到不可分量方法的优点及缺点。他写的《关于抛物线的维数》是一本很有价值的著作。对抛物线的求积，他提出21个证明，其中10个证明是用古人的方法，其它11个则用了新的不可分量的几何方法。他在使用不可分量的方法时发现了许多新的结果，并且在灵活和透彻性方面胜于卡瓦列利。托里切利的工作把前人和同时代人所提出的思想和方法，运用得十分精练与娴熟，以致他的名字在许多情况下都成为争论优先发明权的焦点。

托里切利还用运动合成来确定任意正整数次幂的抛物线的切线。把这种方法用到瞬时方向的思想，隐含了极限的概念。他通过把瞬时速度的概念渗透到几何证明中去，从而跨越了经典的传

统论述。他还采用运动合成法求出了阿基米德著作中所提出的一大类曲线的切线。托里切利用几何方法证明了，一门大炮以相同的初速，但以不同的仰角发射的炮弹的弹道之包络是一条以炮位为焦点的抛物线。

从托里切利对穷竭法、不可分量法、运动合成法的综合应用中，可以发现许多类似于微积分的结论，其中有求曲线弧长、求曲边形面积、求曲线的切线的一些定理。例如，他证明了：摆线一拱下的面积正好是母圆面积的3倍。特别是，他好象已经认识并应用了："求切线问题是求面积问题的逆运算"这一规律。遗憾的是，他没有再前进一步，在这些方法的基础上建立起普遍适用的一般法则。因而他的工作只差一步便迈进了微积分的重要领域。

托里切利还研究过摆线的性质。他得出了：如果分别以三角形ABC的三条边AB、BC、CA为边，各向此三角形的外侧作正三角形ABC_1、A_1BC、CB_1A，则这三个正三角形外接圆交于一点，这个点称为所给三角形的托里切利点。

托里切利对物理学的突出贡献是：在《几何运算》(1644年)一书中，他把动力学的若干著名原理推广到流体方面，研究过水从容器壁上小洞流出的流量问题；证明了现代教科书上的托里切利原理；对晴雨计的研究使他能把经院哲学中"大自然畏惧真空"这个幽灵赶走，他对玻璃管中为什么能支持水银柱的现象给予正确的解释，并提出可以利用水银柱高度来测量气压。1644年他同维维亚尼（Viviani）合作制成了世界上第一具水银气压计，一个大气压力相当于760毫米高的水银柱的压力。为了纪念托里切利，将1毫米水银产生的压强定义为1"托"。托里切利研究抛物体运动时，不但得出了抛物体的轨迹是一条抛物线，而且还猜想出，与水平线成45°角的抛射可以达到最大射程。

沃利斯（Wallis, John）

（1616—1703）

沃利斯是英国数学家、物理学家。1616年12月3日（另一说11月23日）生于肯特郡阿什福德；1703年11月8日（另一说10月28日）卒于牛津。



沃利斯

沃利斯是一个教区长的儿子，从小受到良好的家庭教育。其父希望他继承神职，把他送入了剑桥大学神学院学习。但沃利斯热爱数学，而神学院又不把数学作为主要课程，沃利斯就自修数学。1640年获硕士学位，同年被委任为牧师。沃利斯认真钻研了同时代数学家笛卡儿、卡瓦列利等人的论著，翻译了一些古代数学家的著作。从1645年开始，他就以数学家的身份参加了伦敦自然科学家的学术会议，1649年成为牛津大学萨维里（Savile英国爵士，曾任牛津默顿学院院长，1619年，他在牛津设立了两个专业讲座席位，一个是几何的，一个是天文的）几何讲座教授，并保持这位达54年之久，直到逝世。沃利斯是英国皇家学会的创始人之一，并且是国王的牧师。

沃利斯是开创微积分的先驱。他的主要著作有：《圆锥曲线论》、《无穷小算术》、《论摆线》、《代数学》、《数学文集》等。

沃利斯是最先把圆锥曲线当作二次曲线加以讨论的人之一。

他的《圆锥曲线论》第一次摆脱了过去视圆锥曲线为圆锥的截线的纯几何观念。在这本书里，沃利斯熟练地运用笛卡儿坐标法来讨论二次曲线；他是第一个有意识地引进负向横坐标的人，这本书对完善和传播坐标几何的思想起了重要作用。他的《无穷小算术》一书，大大扩展了卡瓦列利的不可分原理，采用了无穷小量的学说，引入了无穷级数，无穷连乘积。在这本书中他提出了函数的极限的算术概念："变量的极限——这是变量能如此逼近的一个常数，使它们之间的差能够小于任何给定的量。"这个定义虽然还不够严密，但却向极限的精定义迈进了重要的一步。他运用分析法和不可分原理、求出了许多面积，其中包括$y=x^n$与x轴之间的部分面积以及$\sin^n x$和$\cos^n x$自0到$\frac{\pi}{2}$的积分公式即沃利斯公式，并由这个公式推出了$\frac{\pi}{2}$的无穷乘积表达式。他在《摆线论》中得到了与现在计算曲线弧长的公式$\frac{ds}{dx}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$相等价的式子。他的上述成果，为牛顿创立积分学奠定了坚实的基础。在《代数学》里，他完整地说明了零指数、负指数、分数指数的意义，确认无理数是地地道道的数，说明怎样几何地表示实系数二次方程的复根。他还首次引进了沿用至今的无穷大记号∞，并定义无穷小是∞的倒数。沃利斯看到了代数工具的特点，认为代数步骤的简明并不逊于几何的直观，并试图使算术完全脱离几何表示。他使用的是代数方法，而不是传统的几何方法，对求解过程中涉及的无穷小问题给出了精辟的论述。他第一个证明了欧几里得卷5中所有定理都可以毫不困难地从算术导出其结论。他这些观点和成果推动了代数学的发展。在《数学文集》中，他提出了连分数这个名词，并给出了计算连分数的渐近分数的一般法则。他还研究了平行线理论。他在分析圆面积时，得到了有名的沃利斯公式。

沃利斯对物理学同样也有很多贡献，他受皇家学会的委托，研究碰撞物体的性质，在1668年首次提出了动量守恒定律，这是第一个重要的守恒定律。这一发现后来被惠更斯(Huygens)和雷恩（Wren）推广，他的专著《力学-运动简论》（1669—1671年），比较严格地给出了力和动量这些概念的含义。他曾猜想地球引力集中于地心。

沃利斯是17世纪最有才华、最有创造力的科学家之一。由于他运用自己的数学知识，破译了从保王党人缴获的密码，在上层社会中闻名遐迩，成为有名的密码专家。据说他还最先设计出一套教授聋哑人的方法。据传他能心算一个具有53位的数字的平方根，且准确到17位，可谓计算奇才。沃利斯喜欢争论，且带有极端的民族主义的色彩，特别热衷于同象笛卡儿这样的外国人争论。并且他认为同胞牛顿是微积分的创造者，而指责莱布尼茨为剽窃者。

沃利斯不愿受传统的严格性和逻辑性的束缚，大胆地采用虽不成熟但较时常的方法。比如类比法、不完全归纳法，以及不太明确的无穷大、无穷小概念，并坦然地对它们作代数运算，从而获得了前所未有的新结果。他曾说："我把（不完全）归纳法和类比当作一种很好的考察方法，因为这种方法的确常常使我们很容易发现一般规律，或者至少是为此而作了一个很好的准备。"他强调数学在科学研究中的作用，认为："要精确测定物体的运动的规律，除了对它们应用数学度量和数学比例外，别无它法"。

帕斯卡（Pascal, Blaise）

（1623—1662）

帕斯卡是法国数学家、物理学家、哲学家、散文家。1623年6月19日生于克莱蒙费朗；1662年8月19日卒于巴黎。


帕斯卡

帕斯卡4岁丧母，其父是政府的官吏，博学多才，是一个业余数学家。由于帕斯卡从小体弱多病，其父不让他过早接触数学，以免思虑过度有损健康。帕斯卡12岁时，看到父亲阅读几何，便问几何学是什么，父亲为了不想让他知道得太多，就简单的告诉他几何学是研究图形的，并且很快把数学书收藏起来，怕帕斯卡去翻阅，于是帕斯卡就自行研究，当他把自已的发现："任何三角形的三个内角和都是一百八十度"的结果告诉父亲时，父亲惊喜交集，并改变了原来的想法，提早让帕斯卡学习《几何原本》等经典数学名著。

帕斯卡是一位在科学史上富有传奇色彩的人物，曾被描述为数学史上最伟大的"铁才"。18世纪的大数学家达朗贝尔（D'Alembert）赞誉他的成就是"阿基米德与牛顿两者工作的中间环节。"

帕斯卡显示出惊人的早慧：11岁时，当他用餐刀轻敲食盘发出了响声，用手一按住盘子声音便嘎然而止，从而启发他写出论述振动体发音的论文《论声音》；12岁时，就独立地发现了不少

初等几何中的定理，其中包括三角形内角和等于180°；13岁时，发现了二项式展开的系数——“帕斯卡三角形”。1653年，他将这个发现和涉及三角阵算术的关系式写成了《三角阵算术》，经费尔马修订后于1665年出版。在这本书中建立起概率论的基本原理和有关组合论的某些定理。并与费尔马共同建立了概率论和组合论的基础，给出了关于概率论问题的系列解法。莱布尼茨后来读到帕斯卡这方面的研究成果时，深刻的意识到这门“新逻辑学”的重要性。另外，在帕斯卡的关于《三角阵算术》中，包含了数学归纳法最早的也是可被接受的陈述，因此人们认为他也是数学归纳法最早的发现者。

帕斯卡在不到16岁时，受到了几何学家德扎格（Desargues）著作的启发，发现了如下的著名定理：“如果一个六边形内接于一圆锥曲线，则其三对对边的交点共线，并且逆命题亦成立。”为此写成《圆锥曲线论》一文于1640年单篇发行。这是自希腊阿波洛尼厄斯以来关于圆锥曲线论的最大进步，也是射影几何方面的出色成果。后来他又从这个定理导出一系列推论，给出了射影几何的若干定理。

意大利数学家卡瓦列利曾经提示过三角形的面积可通过划分为无数平行直线的办法来计算。帕斯卡为了摆脱卡瓦列利方法中那些逻辑上的缺陷，而认为，一条线不是由点构成的，而是由无数条短线构成；一块面不是由线构成，而是由无数个小块面构成；一个立体不是由面构成，而是由无数个薄薄的立体构成。遵循着这一思想线索，他求出了曲线$y=x^n$下曲边梯形的面积（相当于$\int_0^a x^n dx=\frac{a^{n+1}}{n+1}$），求出了摆线面积和其旋转体体积。帕斯卡当时在运用无穷小研究几何方面达到了很高水平，但由于无穷小概念不甚明确，不可分量也带有神秘色彩，当别人提出问题时，他用“心领神会”来回答别人的批评。帕斯卡认为大自然把无限大、无限小提供给人们不是为了理解而是为了欣赏。他看到

了无限大、无限小互相制约（呈倒数关系）。否认图形由低维元素构成，并认为离散、连续之差异随着解析方法的应用而消失。他的这些思想，为后来的极限与无穷小的严格定义，为微积分学的建立，开辟了道路。他对摆线进行过深入的研究，于1658年写出了名著《论摆线》，解决了关于摆线的许多问题。这本书对年青的莱布尼茨有很深的影响。

帕斯卡18时，设计出世界上第一台机械计算机（能作加减法计算）。

在物理学方面。1648年他通过试验证明了空气有压力，这个试验轰动了整个科学界，从而彻底粉碎了经院哲学中“自然畏惧真空”的古老教条。他还研究了液体平衡的一般规律，发现了“封闭容器内流体在任何一点所受的压力以同等的强度向各个方向同样地传递。”这就是流体静力学中最基本的原理——帕斯卡原理。

帕斯卡还是一位散文大师、思想家和神学辩论家。他所写的《思想录》和《致外省人的信》，被列为经典文学名作。他凭着散文大师驾驭文字的能力，发挥思想家鞭劈入里的洞察力，不但文思流畅，还以其论战的锋芒和思想的深邃著称于世。对法国散文的发展影响甚大，甚至连法国大文豪伏尔泰（Voltaire）看了他的文学作品也倍受鼓舞。

然而，正当帕斯卡享有科学家的盛誉之时，由于身体衰弱消化不良、失眠和头痛的折磨，特别是受其世界观的支配，使之逐步放弃了对数学和科学的探讨，而致力于宗教的冥想。经过短暂的几年之后，虽又回到了科学上来，但已经不能专心致志了，1654年他曾说：受到一个很强的提示，这种重新开展的科学活动是不受上帝欢迎的。这种所谓神的启示是在一次偶然的事故后出现的：一次他乘马车，马失控冲过纳伊桥的栏杆掉入河中，而他自己侥幸由于缰绳突然挣断而未堕下河中，奇迹般地得救。他把这件偶然的事写在一小片厚纸上，一直贴放在胸前，要自己从今

以后牢牢记住这件启示，于是他又宿命地回到宗教的冥想中去了。帕斯卡认为：“凡有关信仰之事不能为理智所考虑”。在他生命最后的一段时间，更走上了极端，象苦行僧一样，把有尖刺的腰带缠在腰上。如果他认为有什么对神不虔诚的想法从脑海出现，就用肘撞击腰带来刺痛身体。这样他年仅39岁就去世了。弥留之际，他还用微弱的声音说：“愿上帝与我同在。”英国著名科学史家沃尔夫说：“帕斯卡显示了早熟的数学天才，但是他在这方面的活动受到了宗教顾忌的阻碍，并以他的夭折而告终。尽管如此，他还是使数学和物理学的若干不同分支取得显著的进展”。

帕斯卡认为：“一个人的美德决不能从他特别的努力来测度，而应从他每天的行为来测度，”他还说：“你要人们赞美你吗？那末你不要称赞你自己。”

惠更斯 (Huygens, Christian)

(1629—1695)



惠更斯

惠更斯是荷兰数学家、物理学家、天文学家。1629年4月14日生于海牙；1695年6月8日卒于海牙。

惠更斯的父亲是位外交家，对很多领域都有着广博的知识和浓厚的兴趣，尤其是数学，同时也是一位诗人和艺术爱好者。这一切都给以惠更斯很好的教育和熏陶。惠更斯16岁进入莱顿大学，两年后转入布勒达大学攻读法律和数学，26岁获得法学博士学位。他访问过伦敦和巴黎，结识了当代许多著名学者，其中包括牛顿和莱布尼茨。1663年成为英国皇家学会第一位外籍会员。1666年成为法国科学院的创始人之一。

惠更斯22岁时，撰文指出格雷戈里(Gregory of St,Vincent)论述化圆为方问题时犯有错误。接着又写了许多论述圆锥曲线求积和以斯内尔（Snell）的三角术改进计算π值的经典方法的小册子，他用的多边形的边数比前人要少得多。

惠更斯是摆钟的发明者。他的名著《钟表的摆动》，于1637年在巴黎问世。在该书中包含曲率的数学理论。惠更斯证明了倒旋轮线的等时性；引进并讨论了渐屈线和渐伸线的一般概念和理论，得出抛物线的渐屈线是一条半三次抛物线，旋轮线的渐屈线是同样大小的另一条旋轮线；求出了蔓叶线的弧长；他研究过

对数螺线、悬键线；他对面积和体积的研究成果累累，而且第一个计算出抛物面和双曲面部分表面的面积；他在处理某些问题时所采用的方法，与微分方程的积分法相似；在计算积分时他运用了无穷级数；他建立了相当完备的连分数理论，并应用收敛的连分数作为天体运动周期的最佳近似值，他还写了关于对数曲面的论文；对于多项式给出了费尔马极大、极小法则的现代形式，并且使数学的方法在物理学中得到了广泛的应用。1657年，他在与帕斯卡和费尔马通信的基础上，写出了关于概率论这门学科中的第一篇正式论文《论赌博中的计算》，他解决了许多概率论方面的有趣难题，还引入了"数学期望"这个重要概念。

在物理学方面：1673年他解决了求物理摆的摆心问题，并得到关于离心力的许多原理。他关于摆钟的书对牛顿地心引力的发现颇具影响；他发展了沃利斯关于动量守恒的研究结果，还验证了两个物体在给定的方向上的合动量在碰撞前后是一样的；他是光的波动理论的创立者，解释了光的波动学说，提出了光波面在媒质中传播规律的惠更斯原理，并用几何方法推出了反射和折射定律，解释了双折射现象；他和胡克（Hooke）共同测定了温度表的冰点和沸点。

在天文学方面：为了研究太阳系的运动，他改进了望远镜，并发明了望远镜上用于消除色差的目镜；他在1665年发现了土星的卫星——土卫六，以后又观测到土星环，发现了猎户星云，火星极冠和木星带。1680年他制造了一台行星仪。

惠更斯不但是17世纪一位多才多艺的科学家，而且还是很有才华的科学活动组织者，法国科学院的建立在很大程度上要归功于他的矻矻不懈的努力。他终身未娶，把时光和精力都贡献给了科学事业。牛顿称赞他是"尽善尽美的惠更斯。"

惠更斯和伽利略、牛顿一样，认为在科学研究中，数学的演绎部分所起的作用比实验部分所起的作用要大。他们都是以数学家的身份去探索自然的，他们期望通过直观或通过关键性的观察

和实验去了解广泛的、深刻的清晰而且不变的数学原理，然后从这些基本原理导出新的定律。

惠更斯的许多重要著作，是在他逝世后发表的。其全集共22卷，由荷兰科学院编辑出版。

巴罗（Barrow，Isaac）

（1630—1677）



巴 罗

巴罗是英国数学家、神学家。1630年10月生于伦敦；1677年5月4日卒于伦敦。

巴罗是手工业商人之子，14岁进入剑桥大学三一学院学习，18岁毕业并获得学士学位。后游历欧洲，归来后（1660年）被授圣职，1662年被聘为伦敦格雷沙姆（Gresham，英国爵士，1596年他在伦敦格雷沙姆学院设立的几何讲座席位）几何教授，1664年被选为剑桥大学第一任“卢卡斯教授”（这是遵照卢卡斯（Lucas）的遗嘱设立的一种荣誉教授，每年有若干额外的津贴），1672年任三一学院院长，奠定了该院著名的图书馆的基础。1775年任剑桥大学副校长。他是英国皇家学会首批会员。

巴罗在数学、物理学、天文学和神学上都很有成就，在数学上的重要贡献是：给出了求切线的方法，并作出了笛卡儿叶形线等一系列的重要曲线的切线；引入了“微分三角形”的概念，即相当于现代以dx，dy，ds为边的直角三角形。不过当时还没有使用“微分三角形”这一名称。从巴罗的著作中可以看出：他实际上已经得到了两个函数的积和商的微分定理，x^n的微分，求曲线的长度，定积分中的变量代换，甚至还有隐函数的微分定理。但是在巴罗的著作里主要是单纯的几何的表达，还没有体现出微

积分的统一思想。关于求切线和求积问题的互逆性，在他的《几何讲义》中有明确的陈述和证明采用的几何形式。但似乎他本人并没有认识它的重要性，以至没有作一般性的探讨。另外他对圆锥曲线也很有研究。巴罗的主要著作有：《光学讲义》（1669年）、《几何讲义》（1670年），他精通希腊文和阿拉伯文，并被誉为那个时代最权威的希腊语专家之一。他编译了《阿基米德全集》、《阿波洛尼厄斯曲线》（第十卷）、欧几里得的《几何原本》等，其中《几何原本》曾作为英国标准几何教材达半个世纪之久。巴罗是一位能言善辩、精力充沛的讲道者，晚年把主要精力转到神学。他作为神学家的声誉是靠《论罗马教皇的主权》一书得来的，此书在他去世后3年出版。

巴罗是牛顿的老师，并且是第一个发现并赏识牛顿才能的人。牛顿对数学和光学的研究，得助于巴罗的地方甚多。尤其是巴罗的“微分三角形”的深刻思想，给予牛顿极大的影响。牛顿对待科学的严肃态度和锲而不舍的精神以及他那敏锐的洞察力，深受巴罗的赞赏。为了更好的培养牛顿，他选定牛顿作为他的助手，协助他编写讲义，这为牛顿后来的发展打下了重要基础。1669年，当他看到牛顿在数学、光学和力学上都有重大创见时，就坦然宣称牛顿的学识已经超过了自己，并把“卢卡斯教授”的职位让给年仅26岁的牛顿，从此牛顿开始了他18年的大学教授生活。巴罗这种举能让贤的高尚品格一直为人们所称颂，现在三一学院牛顿雕像之北，矗立着巴罗雕像，为后世所敬仰。值得指出的是，这位对科学作了重要贡献，且具有慧眼识英才，又能举能让贤的杰出人物，在其幼年上学时，却非常淘气而惹人讨厌，致使他的父亲祷告：“要是上帝愿意带走我的这个儿子，我宁愿抽出其姓伊萨克（Isaac）。”

巴罗有一句名言：“一个爱书的人，他必定不致缺少一个忠实的朋友、一个良好的导师、一个可爱的伴侣、一个优婉的安慰者”。

格雷戈里 (Gregory, James)

(1638—1675)

格雷戈里是英国数学家、天文学家。1638年12月14日生于苏格兰阿伯丁附近的德鲁莫克；1675年10月卒于爱丁堡。



格雷戈里

格雷戈里早年就学于阿伯丁。1665年到意大利帕多瓦大学从事数学和天文学的研究，1669—1674年任圣·安德鲁大学的数学教授，1674—1675年任爱丁堡大学的首席数学教授，他是著名的苏格兰学派的代表人物。他是英国皇家学会会员。

格雷戈里对微积分学的产生作出过重要贡献。

他在1667年曾证明扇形的面积不能表为圆半径和弦的代数函数，这说明他对代数函数和超越函数的区别有一定的研究。他在论文《论圆和双曲线的求积》(1667年)中，将函数定义为这样一个量：它是从一些其它的量经过一系列代数运算而得到的，或者经过任何其它可以想象到的运算而得到的。后面这种运算他指的是趋于极限的运算。在这篇论文中明白指出，求面积、体积和曲线长度的方法，包含一个新的过程，即极限过程。他说这种运算同加、减、乘、除以及开方等五种代数运算的性质不同。他还注意到，这种极限过程有可能产生一种无理数，它不再是某一有理数的根。他给予穷竭法以代数的表述形式，并看出用外切或内

接于已知面积或体积的直线形所得到的逐次逼近值最后都收敛到相同的量。值得指出的是，他不是用静态的不可分量，而是通过无限细分这种运动变化的极限思想，从而缩短了穷竭法与极限思想之间的距离。

特别是他在1668年的《几何的通用部分》中，给出了求曲线所围成的面积及旋转体体积的一系列规则，给出了计算曲线长度的方法，证明了切线问题是面积问题的逆问题。可惜他这本书在当时未引起足够的注意。

格雷戈里对无穷级数作了深入的研究，明确地指出了无穷级数表示一个数，即级数的和。并称这个数为级数的极限。他说："过程的结束就是级数的终点，即使延续到无穷，过程也永远达不到这个终点，但是它能够趋向于它并接近到任何给定的程度。"他早在1670年就得到现在所谓的泰勒定理，但没有发表。而泰勒于1712年叙述这一定理并于1715年发表它，已是40多年后的事了。他在1670年11月23日得到了现在所谓的格雷戈里—牛顿公式：

$$f(a+nh)=f(a)+n\Delta f(a)+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(a)+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\Delta^k f(a)+\cdots。$$

他还把arctg$x$，tg$x$，arcsin$x$等展开成无穷级数，并推出了以他的名字命名的展开式：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

格雷戈里大量应用级数作数值计算，得到对数值表、函数值表以及积分表。他已经知道级数的和可以为有限，也可以为无穷，说明他已是最先区分收敛级数和发散级数的数学家之一。1668年他就采用了"收敛"与"发散"的说法，但是没有继续去发展这些概念。

格雷戈里研究过化圆为方的问题，曾给出用规、尺化圆为方

的不能性的证明，这个证明表现出他高超的一个天才，但他的证明不圆满。

格雷戈里对物理学也作出过贡献。曾有《发展中的光学》一书问世（1663年），其中叙述了以他的名字命名的反射望远镜。他还著有《称量空虚的伟大的新艺术》（1672年），这部著作对格拉斯哥神学教授辛克莱（Sinclair）进行了抨击。

格雷戈里对科学有执着的追求，长期不懈地进行天文观测，导致眼睛疲劳过度而双目失明，终年仅37岁。1939年，H·W·特恩布尔主编了《J·格雷戈里诞辰三百周年纪念册》收有格雷戈里的信件和发表过的手稿。

牛顿 (Newton, Isaac)

(1642—1727)



牛　顿

牛顿是英国数学家、物理学家、天文学家。1642年12月25日生于英格兰林肯郡的伍尔索普；1727年3月20日卒于伦敦。

牛顿出生于农民家庭，幼年颇为不幸：他是一个遗腹子，又是早产儿，3岁时母亲改嫁，把他留给了外祖父母，从小过着贫困孤苦的生活。他在条件较差的地方学校接受了初等教育，中学时也没有显示出特殊的才华。1661年考入剑桥大学三一学院，由于家庭经济困难，学习期间还要从事一些勤杂劳动以减免学费。由于他学习勤奋，并有幸得到著名数学家巴罗教授的指导，认真钻研了伽利略、开普勒、沃利斯、笛卡儿、巴罗等人的著作，还做了不少实验，打下了坚实的基础，1665年获学士学位。

1665年，伦敦地区流行鼠疫，剑桥大学暂时关闭。牛顿回到伍尔索普，在乡村幽居的两年中，终日思考各种问题、探索大自然的奥秘。他平生三大发明，微积分、万有引力定律、光谱分析，都萌发于此，这时他年仅23岁。后来牛顿深有感触的说："我的成功当归功于精力的思索"。"没有大胆的猜想就作不出伟大的发现。"1667年，他回到剑桥攻读硕士学位，在获得学位后，成为三一学院的教师，并协助巴罗编写讲义，撰写微积分和

光学论文。他的学术成就得到了巴罗的高度评价。1669年，巴罗坦然宣称牛顿的学识已超过自己，并把“路卡斯教授”的职位让给了牛顿，牛顿时年仅26岁。

牛顿发现微积分，首先得助于他的老师巴罗，巴罗关于“微分三角形”的深刻思想，给他极大影响，另外费尔马作切线的方法和沃利斯的《无穷算术》也给了他很大启发。牛顿的微积分思想（流数术）最早出现在他1665年5月21日写的一页文件中。他的微积分理论主要体现在下述三部论著里。

《运用无穷多项方程的分析学》，在这一著作中他给出了求瞬时变化率的普遍方法，阐明了求变化率和求面积是两个互逆问题，从而揭示了微分与积分的联系，即沿用至今的所谓微积分的基本定理。当然，牛顿的论证在逻辑上是不够严密的。正如他所说：“与其说是精确的证明，不如说是简短的说明。”他还应用这一方法得到许多曲线下的面积，并解决了一些能够表示成积分和式的其它问题。在1669年牛顿将这本专论印成小册子给朋友。直到1711年才正式出版。

《流数术和无穷级数》。在这一论著中，牛顿对他的微积分理论作了更加广泛而深入的说明，并在概念、计算技巧和应用各方面作了很大改进。例如，他改变了过去静止的观点，认为变量是由点、线、面连续运动而产生的。他把变量叫做“流”，把变量的变化率叫做“流数”，并引进了高阶流数的概念。他用更清晰准确的语言阐明了微积分的基本问题：一是，已知两个流x与y之间的关系，求它们的流数之间的关系；二是，已知流数$\dot{x}$与$\dot{y}$之间的关系，求它们的流之间的关系，并指出这是两个互逆问题。该书中，牛顿还把流数法用于隐函数的微分，求函数的极值，求曲线的切线、长度、曲率和拐点。并给出了直角坐标和极坐标下的曲率半径公式，附了一张积分简表。这部著作完成于1671年，但却经历了半个多世纪直到1736年才正式出版。

《求曲边形的面积》，这是一篇研究可积分曲线的经典文献。

这篇论文的一个主要目的是为澄清一些遭到非议的基本概念。牛顿试图排除由“无穷小”而造成的混乱局面。为此他把流数定义为“消逝增量”的最终比，和“初生宗量”的最初比，尽管这种说法仍然是含糊其辞而有失严格，但把求极限的思想方法作为微积分的基础在这里已初露端倪。这篇论文写成于1676年，发表于1704年。

牛顿上述三个论著是微积分发展史上的重要里程碑，也为近代数学甚至近代科学的产生与发展开辟了新纪元。

牛顿的名著《自然哲学的数学原理》，不仅首次以几何形式发表了流数术及其应用，更重要的是它完成了对日心地动说的力学解释，把开普勒的行星运动规律、伽利略的运动论和惠更斯的振动论等统一成为力学的三大定律。这部巨著1687年一问世，立刻被公认为人类智慧的最高结晶。哈雷赞誉它是“无与伦比的论著”。出版后不胫而走，很快被抢购一空，有人买不到，就用手抄写。这本书在社会上引起了强烈的反响。例如，过去许多人认为彗星是魔鬼的产物，它是预示将要发生不祥事件的信号，《自然哲学的数学原理》出版之后，受过教育的人再也不相信这种鬼话了。

由于牛顿对科学作出了巨大贡献，因而受到了人们的崇敬：1688年当选为国会议员，1689年被选为法国科学院院士，1703年当选为英国皇家学会会长，1705年被英国女王封为爵士。牛顿的研究工作为近代自然科学奠定四个重要基础：他创建的微积分，为近代数学奠定了基础；他的光谱分析，为近代光学奠定了基础；他发现的力学三大定律，为经典力学奠定了基础；他发现的万有引力定律，为近代天文学奠定了基础。莱布尼茨说：“在从世界开始到牛顿生活的年代的全部数学中，牛顿的工作超过一半。”汤姆生（Thomson）甚至说：“牛顿的发现对英国及人类的贡献超过所有英国国王。”然而，即使像牛顿这样的伟大人物，也并非完美无缺。例如，由于他的一些学术成就或论著常常受到同时

代一些科学家的争论或抨击，使他对争论简直厌恶到病态的程度，德·摩尔根（De Morgan）说："一种病态的害怕别人反对的心理统治了他一生。"他的大部分著作都是在朋友们的劝告和坚决请求下才勉强整理出来的。晚年他在神学势力的影响下几乎完全放弃了科学而潜心于神学的研究，撰写了150多万字的有关宗教、神学方面的文稿，其文字之晦涩、见解之荒谬，推理之混乱简直令人不敢相信它是出自一位大科学家之手。

牛顿临终时说："我不知道世人对我怎样看法，但是在我看来，我只不过象一个在海滨玩耍的孩子，偶尔很高兴地拾到几颗光滑美丽的石子或贝壳，但那浩瀚无涯的真理的大海，却还在我的前面未曾被我发现。"他还说："如果我之所见比笛卡儿等人要远一点，那只是因为我是站在巨人肩上的缘故"。

牛顿终生未娶。他死后安葬在威斯敏斯特大教堂之内，与英国的英雄们安葬在一起。当时法国大文豪伏尔泰正在英国访问，他羡慕地评论说，英国纪念一位数学家就象其它国家纪念国王一样隆重。牛顿墓碑上拉丁语碑铭的最后一句是："他是人类的真正骄傲，让我们为之欢呼吧！"

莱布尼茨（Leibniz, Gottfried Wilhelm）

（1646—1716）

莱布尼茨是德国数学家、自然主义哲学家、自然科学家。1646 年 7 月 1 日生于莱比锡；1716年11月14日卒于汉诺威。



莱布尼茨

莱布尼茨的父亲是莱比锡大学的哲学教授，在莱布尼茨6岁时就去世了。莱布尼茨自幼聪敏好学，经常到父亲的书房里阅读各种不同学科的书籍，中小学的基础课程主要是自学完成的。16岁进莱比锡大学学习法律，并钻研哲学，1664年取得该校哲学学士学位。1666年获阿尔特多夫大学博士学位，该校要聘他为教授，被他谢绝了。1672—1676年，任外交官并到欧洲各国游历，在此期间他结识了惠更斯等科学家，并在他们的影响下深入钻研了笛卡儿，帕斯卡、巴罗等人的论著，并写下了很有见地的数学笔记。这些笔记显示出他的才智，从中可以看出莱布尼茨深刻的理解力和超人的创造力。1676年，他到德国西部的汉诺威，担任腓特烈公爵（Duke John Frederick）的顾问及图书馆馆长近40年，这使他能利用空闲探讨自己喜爱的问题，撰写各种题材的论文，其论文之多浩如烟海。莱布尼茨1673年被选为英国皇家学会会员，1682年创办《博学文摘》，1700年被选为法国科学院院士，同年创建了柏林科学院，并担任第一任院长。

莱布尼茨把一切领域的知识作为自己追求的目标。他企图扬弃机械论的近世哲学与目的论的中世纪哲学，调和新旧教派的纷争，并且为发展科学制订了世界科学院计划，还想建立通用符号，通用语言，以便统一一切科学。莱布尼茨的研究涉及数学、哲学、法学、力学、光学、流体静力学、气体学、海洋学、生物学、地质学、机械学、逻辑学、语言学、历史学、神学等41个范畴。他被誉为："17世纪的亚里士多德"，"德国的百科全书式的天才"。他终生努力寻求的是一种普遍的方法。这种方法既是获得知识的方法，也是创造发明的方法。他最突出的成就是创建了微积分的方法。

莱布尼茨才气横溢，思如泉涌，但却厚积而薄发。他的微积分思想的最早记录，是出现在他1675年的数学笔记中。

莱布尼茨研究了巴罗的《几何讲义》之后，意识到微分与积分是互逆的关系，并得出了，求曲线的切线依赖于纵坐标与横坐标的差值（当这些差值变成无穷小时）的比。而求面积则依赖于在横坐标的无穷小区间上的纵坐标之和或无限窄矩形面积之和。并且这种求和与求差的运算是互逆的。即莱布尼茨的微分学是把微分看作变量相邻二值的无限小的差，而他的积分概念则以变量分成的无穷多个微分之和的形式出现。

莱布尼茨的第一篇微分学论文《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》，于1684年发表在《博学文摘》上。这也是历史上最早公开发表的关于微分学的文献。文中介绍了微分的定义，函数的和、差、积、商以及乘幂的微分法则，关于一阶微分不变形式的定理，关于二阶微分的概念，以及微分学对于研究极值、作切线、求曲率及拐点的应用。他关于积分学的第一篇论文发表于1686年，关于积分常数的论述发表于1694年。他得到的特殊积分法有：变量替换法、分部积分法、在积分号下对参变量的积分法，利用部分分式求有理式的积分方法等。他还给出了判断交错级数

收敛性的准则。在常微分方程中，他研究了分离变量法，得出了一阶齐次方程通过用$y=vx$的代换可使其变量分离，得出了如何求一阶线性方程的解的方法。他给出用微积分求旋转体体积的公式等等。

莱布尼茨是数学史上最伟大的符号学者，他在创建微积分的过程中，花了很多时间来选择精巧的符号。他认识到好的符号不仅可以起到速记作用，更重要的是它能够精确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系。他曾说："要发明，就得挑选恰当的符号，要做到这一点，就要用包义简明的少量符号来表达或比较忠实地描绘事物的内在本质，从而最大限度减少人的思维劳动。"现在微积分学中的一些基本符号，例如，dx，dy，dy/dx，d^n，$\int$，$\log$……等等，都是他创立的。他的优越的符号为以后分析学的发展带来了极大方便。然而他在创建微积分时，甚至比牛顿更不注意严格的逻辑性与严密性，尽管他的方法更富有想象力与启发性。

莱布尼茨和牛顿研究微积分学的基础，都达到了同一个目的，但各自采用了不同的方法。莱布尼茨是作为哲学家和几何学家对这些问题产生兴趣的，而牛顿则主要是从研究物体运动的需要而提出这些问题的。他们都研究了导数、积分的概念和运算法则，阐明了求导数和求积分是互逆的两种运算，从而建立了微积分的重要基础。牛顿在时间上比莱布尼茨早10年，而莱布尼茨公开发表的时间却比牛顿早3年。

作为一个数学家，莱布尼茨的声望虽然是凭借他在微积分的创建中树立起来的，但他对其它数学分支也是有重大贡献的。例如，对笛卡儿的解析几何，他就提出过不少改进意见，"坐标"及"纵坐标"等术语都是他给出的。他提出了行列式的某些理论，他为包络理论作了很多基础性的工作。并给出了曲率中的密切圆的定义。莱布尼茨还是组合拓扑的先驱，也是数理逻辑学的鼻祖，他系统地阐述了二进制记数法。

莱布尼茨是现代机器数学的先驱，他在帕斯卡加、减法机械

计算机的基础上进行改进，使这种机械计算机能进行乘法、除法、自乘的演算。

莱布尼茨是著名的哲学家，并以“单子论”闻名于世，他认为现实世界是由形成先定和谐的无数个精神活动实体一单子组成的。他还是具有特殊天才的外国语专家，曾赢得过梵文学者的称号。

莱布尼茨很重视和其它学者交流、讨论问题。例如，他在挑选数学符号时，就很注意征求别人的意见；他与多方面的人士保持通信和接触，最远的到达锡兰和中国。

莱布尼茨十分爱好和重视中国的科学文化和哲学思想。1696年在他编辑出版的《中国新事荟编》一书的序言中说：“中国和欧洲各居世界大陆的东西两端，是人类伟大的教化和灿烂文明的集中点。”他主张东西方应在文化、科学方面互相学习、平等交流。他曾写了一封长达四万字的信，专门讨论中国的哲学。信的最后谈到伏羲的符号、《易经》中的64个图形与他的二进位制，他说中国许多伟大的哲学家“都曾在这64个图形中寻找过哲学的秘密……，这恰恰是二进制算术。这种算术是这位伟大的创造者（伏羲）所掌握而几千年之后由我发现的。”他还送过一台，他制作的计算机的复制品给康熙皇帝。

莱布尼茨虽然脾气急躁，但容易平息。他一生没有结婚，一生不愿进教堂。作为一位伟大的科学家和思想家，他把自己的一生奉献给了科学文化事业。他的著述如林。20世纪初，柏林科学院曾计划出版40卷的莱布尼茨全集，后因世界大战而未实现。仅是1850—1863年编辑的《莱布尼茨数学著作集》就有7卷。

莱布尼茨曾说：“我有非常多的思想，如果别人比我更加深入透彻地研究这些思想，并把他们心灵的美好创造与我的劳动结合起来，总有一天会有某些用处。”

罗尔 (Rolle,Michel)

(1652—1719)

罗尔是法国数学家。1652年4月21日生于昂贝尔特；1719年11月8日卒于巴黎。

罗尔出生于小店主家庭，只受过初等教育，且结婚过早，年青时贫困潦倒，靠充当公证人与律师抄录员的微薄收入养家糊口。他利用业余时间刻苦自学代数与丢番图的著作，并很有心得。1682年，他解决了数学家奥扎南（Ozanam）提出的一个数论难题，受到了学术界的好评，从而声名鹊起也使他的生活有了转机，此后，担任初等数学教师和陆军部行政官员。1685年进入法国科学院，担任低级职务，到1699年才获得科学院发给的固定薪水。此后他一直在科学院供职，1719年因中风去世。

罗尔在数学上的成就主要是在代数方面，专长于丢番图方程的研究。1690年他的专著《代数学讲义》问世，在这本书中他论述了仿射方程组，并使用欧几里得法则系统地解决了丢番图的线性方程问题。罗尔已掌握了方程组的消元法，并提出了用所谓“级联”（Cascades）法则分离代数方程的根。他还研究了有关最大公约数的某些问题。

罗尔所处的时代正当牛顿、莱布尼茨的微积分诞生不久，由于这一新生事物还存在逻辑上的缺陷，从而遭受多方面的非议，其中也包括罗尔，并且他是反对派中最直言不讳的一员。1700年，在法国科学院发生了一场有关无穷小方法是否真实的论战。在这场论战中，罗尔认为无穷小方法由于缺乏理论基础将导致谬误，并说：“微积分是巧妙的谬论的汇集”。瓦里格农（Varignon）则为无穷小分析的新方法辩护。从而在罗尔和瓦里格农、索弗尔

(Saurin)等人之间，展开了激烈的争论。约翰·贝努利(Bernoulli, Johann)还讽刺罗尔不懂微积分。由于罗尔对此问题表现得异常激动，致使科学院不得不屡次出面干预。直到1706年秋天，罗尔才向瓦里格农、方单（Fontenlle）等人承认他已经放弃自己的观点，并且充分认识到无穷小分析新方法的价值。

罗尔于1691年在题为《任意次方程的一个解法的证明》的论文中指出了：在多项式方程$f(x)=0$的两个相邻的实根之间，方程$f'(x)=0$至少有一个根。（但罗尔并没有使用导数的概念和符号，后一个多项式实际上是前一多项式的导数）。罗尔只叙述了这个结论，而没有给出证明。这个定理本来和微分学无关，因为当时罗尔还是微积的怀疑者和极力反对者，他拒绝使用微积分，而宁肯使用繁难的代数方法。但在一百多年之后，即1846年，尤斯托·伯拉维提斯(Giusto Bellavitis)将这一定理推广到可微函数，即如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且这个区间内部$f'(x)$存在，又$f(a)=f(b)$，则在$[a,b]$内至少有一点c，使$f'(c)=0$。尤斯托·伯拉维提斯还把此定理命名为罗尔定理。

罗尔还研究并得到了与现在相一致的实数集的序的观念。他促成了目前所采用的负数大小顺序性的建立。而在他之前，笛卡儿及同时代的许多人都认为$-2<-5$。罗尔自1691年就已采用了现在的负数的大小排列顺序。他明确说："我认为$-2a$是一比$-5a$大的量。"（其中a是一个正实数）。另外，罗尔在《代数学讲义》一书中设计了一个数a的n次方根的符号为$\sqrt[n]{a}$，（而在他之前，则是用符号$\sqrt{na}$来表示a的n次方根），他的这个符号立刻被普遍地接受，并沿用直今。

雅科布·贝努利 (Jacob Bernoulli)

(1654—1705)

雅科布·贝努利是瑞士数学家。1654年12月27日生于巴塞尔；1705年8月16日卒于巴塞尔。



雅科布·贝努利

雅科布·贝努利最初按父亲的意见学习神学，但当他读了笛卡儿、沃利斯等人的著作后，兴趣就转向了数学。他的数学几乎是无师自通的。他在荷兰及英国旅行期间，结识了一些知名的数学家，并成了莱布尼茨的好友，从此便和莱布尼茨有频繁的书信往来，共同探讨微积分等问题。雅科布·贝努利从33岁到逝世的18年时间，一直是巴塞尔大学的教授——开始是实验物理学教授、后来为数学教授。

雅科布·贝努利在数学领域里作出了卓越的贡献：他是用微积分方法求解常微分方程的先驱者之一，在微分方程中有以他的名字命名的贝努利方程，他采用变量分离法解出了这种方程；他研究过无穷级数，独立地发现了调和级数的发散性，给出了系数中包含贝努利数的tgx的幂级数展开式，他写的《关于无穷级数及其有限和的算术应用》被认为是级数理论方面的第一部教科书；在数论中，他提出了很有影响的贝努利数和贝努利多项式。

雅科布·贝努利的名著《推测术》的出版是概率论发展史中的一件大事。此书可以说是把概率论建立在稳固的理论基础

之上的首次尝试，其中给出了著名的大数定理，从而使贝努利的名字载入到数学史册。他自己也为发现这个定理而感到自豪，他曾说："这个问题我已经压了20年没有发表，现在打算把它公诸于世了，它又难又新奇，但它有极大的用处，以致在这门学科的所有其它分支中都有高度的价值和位置。"为了纪念他的这个发现，人们把它命名为贝努利定理。

科布雅·贝努利提出并讨论过等周问题，也是最早研究变分学的数学家之一；他给出了直角坐标和极坐标的曲率半径公式，指出某些高次曲线用极坐标表示比较简单，且便于研究，这也是系统地使用极坐标的开始；他研究过许多特殊曲线：例如，把悬链线的研究扩展到密度可变的链和在有心力作用下的链；对等时曲线作过深入的研究，自此弄清楚原来是尖点处有垂直切线的半三次抛物线；发现和研究了双纽线——即到两定点(焦点)距离之积等于常量a^2的曲线。特别是，他对对数螺线进行了极为深入的探讨，发现了这种曲线经过多种变换后仍是对数螺线。例如，对数螺线的渐屈线和渐伸线仍是对数螺线，从极点引切线的垂线其垂足的轨迹也是对数螺线，以极点为发光点经对数螺线反射后得到无数根反射线，和所有这些反射线相切的曲线还是对数螺线。从而他非常赞叹这种曲线的美妙特性，以致他在遗嘱里要求把对数螺线刻在他的墓碑上并题颂词"虽经沧桑，依然故我。"

洛比塔(L'Hospital, Guillaume Francis Antoine de)

（1661—1704）

洛比塔是法国数学家，1661年生于巴黎；1704年2月2日卒于巴黎。



洛比塔

洛比塔出生于法国贵族家庭，他拥有圣梅特（Saimte-Mesme）侯爵昂特尔芒（d'Entremont）伯爵的称号。青年时期一度任骑兵军官，因眼睛近视而自行告退，转向从事学术研究。

洛比塔很早即显示出其数学才华，15岁时解决了帕斯卡所提出的一个摆线难题。他是莱布尼茨微积分的忠实信徒，并且是约翰·贝努利（Johann Bernoulli）的高足。成功地解答过约翰·贝努利提出的“最速降线”问题。他是法国科学院院士。

洛比塔最大的功绩是撰写了世界上第一本系统的微积分教程——《用于理解曲线的无穷小分析》。这部著作出版于1696年，后来多次修订再版，为在欧洲大陆，特别是在法国，普及微积分起了重要作用。这本书追随欧几里得和阿基米德古典范例，以定义和公理为出发点。在这本书中，先给出了如下定义和公理：“定义1，称那些连续地增加或减少的量为变量，……。”“定义2，一个变量在其附近连续地增加或减少的无穷小部分称为差分（微分），……”然后给出了两个公理，第一个是说，几个仅差无穷小量的量可以互相代替。第二个是说，把一条曲线看作是无穷多段

无穷小直线的集合，……，在这两个公理之后，给出了微分运算的基本法则和例子。第二章应用这些法则去确定曲线在一个给定点处的斜率，并给出了许多例子，采用了较为一般性的方法。第三章讨论极大、极小问题，其中包括一些从力学和地理学引来的例子，接着讨论了拐点与尖点问题，还引入了高阶微分。以后几章讨论了渐屈线和焦散曲线等问题。

洛比塔这本书中的许多内容是取材于他的老师约翰·贝努利早期的著作。其经过是这样的：约翰·贝努利在1691—1692年间写了两篇关于微积分的短论，但未发表。不久以后，他答应为年轻的洛比塔侯爵讲授微积分，定期领取薪金，作为报答。他把自己的数学发现传授给洛比塔，并允许他随时利用。于是洛皮塔根据约翰·贝努利的传授和未发表的论著以及自己的学习心得，撰写了《用于理解曲线的无穷小分析》。这部著作不但普及了微积分，而且帮助约翰·贝努利完成并传播了平面曲线的理论。特别值得指出，在这部书的第九章中有求分子分母同趋于零的分式极限的法则，即所谓"洛比塔法则"：如果$f(x)$和$g(x)$是可微函数，且$f(a)=g(a)=0$，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，当然，须在右端的极限存在或为$\infty$的情况下。但当时洛比塔的论证没有使用函数的符号，是用文字叙述的，相当于断言

$$\frac{f(a+dx)}{g(a+dx)}=\frac{f(a)+f'(a)dx}{f(a)+g'(a)dx}=\frac{f'(a)dx}{g'(a)dx}=\frac{f'(a)}{g'(a)},$$

当$f(a)=g(a)=0$，他的结论是：如果把给定曲线的纵坐标y"表示为一个分式，且$x=a$时分子和分母都等于零"，那么"如果求出分子的微分，再除以分母的微分，最后在其中令$x=a$，便得到〔当$x=a$时的纵坐标y的〕值。"这个法则实际上是约翰·贝努利在1694年7月22日写信告诉他的。至于现在一般微积分教材上用来解决其它未定式求极限的法则，是后人对洛比塔法则所作的

推广（例如，未定式$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$的法则就是后来欧拉（Euler）给出的），但现在都笼统地叫做“洛比塔法则。”

洛比塔曾计划出版一本关于积分学的书，但在得悉莱布尼茨也打算撰写这样一本书时，就放弃了自己的计划。他还写过一本关于圆锥曲线的书，——《圆锥曲线分析论》。此书在他逝世之后16年才出版。

洛比塔豁达大度，气宇不凡。由于他与当时欧洲各国主要数学家都有交往，从而成为全欧传播微积分的著名人物。

约翰·贝努利 (Johann Bernoulli)

（1667—1748）


约翰·贝努利

约翰 · 贝努利是瑞士数学家。1667年8月6日生于巴塞尔；1748年1月1日卒于巴塞尔。

约翰·贝努利是雅科布·贝努利之弟，年青时经商，后在其兄雅科布的指导下研究数学和医学。27岁时获得巴塞尔大学博士学位，其论文是关于肌肉的收缩问题。但不久他迷上了微积分学，并且很快的掌握了它。28岁时任荷兰格罗宁根大学数学物理教授，当其兄雅科布·贝努利去世后，他继任巴塞尔大学数学教授达43年之久，并被选为彼得堡科学院的名誉院士。

约翰·贝努利是莱布尼茨的好友和热诚拥护者，他为维护莱布尼茨的学术思想参加了辩论并发挥了极大作用。通过这场辩论大大地充实和丰富了微积分学。例如，他认为函数可借助于常量和变量用解析式表达出来，这在当时是一个了不起的进步，因为在此之前函数只是几何上的解释；他在研究分子分母同趋于零的分式极限时，发现了一个重要法则，这就是现在微积分教材上的洛比塔法则。其实这是他于1694年写信告诉洛比塔的；他曾把函数展成级数的形式，这个级数与泰勒级数相似，但他得到这一结果比泰勒要早；他在求曲线的长度和积分的计算时，利用某些几何性质，完善和发展了积分计算的一套方法，例如他曾出色

地完成了有理分式的积分法；他关于微积分学方面的著作对微分方程的发展产生了深远的影响。他研究了解齐次微分方程的方法，并给出其兄雅科布·贝努利提出的一种微分方程的另一解法，他还提出常系数微分方程的解法，并导出与一族曲线都正交的轨线所满足的微分方程，并解出了它。他写的《积分法数学讲义》是微积分发展中的重要著作，它使微积分的作用在欧洲大陆得到正确评价，而自己也因此成为数学界最有影响的人物之一。

约翰·贝努利是一位多产的数学家。在几何方面：给出了空间坐标的定义，研究过多种特殊曲线，建立了焦散曲面。在力学方面：对很多概念都给出了准确的解释，提出了所谓虚拟速度原理。对光学中反射和折射的研究也造诣很深。他曾以级数为工具计算曲线的长度和区域的面积。他深入地研究过三角函数、指数函数，得到了很有价值的结果。特别是在1696年，他曾向欧洲数学家提出了一个挑战性的数学问题："设在垂直平面内，有任意两点，一个质点受地心引力的作用，自较高点下滑到较低点，不计摩擦，问沿什么曲线时间最短？"——这就是历史上有名的"最速降线问题"。问题的难处在于和普通的极大、极小值求法不同，它是要求出一个未知函（曲线）来满足所给条件。当时许多数学家都被这个问题的新颖所吸引。牛顿、莱布尼茨、洛比塔、雅科布·贝努利和他自己分别都做出了正确解答（其解答是通过该两点的摆线的一段弧）。稍后，欧拉、拉格朗日（Lagrange）进一步找出了这类问题的普遍解法，从而引出了数学的一个新分支——变分学。希尔伯特于1900年在第二届国际数学家代表大会上的演说中，对这个问题给予了极高的评价。他说："约翰·贝努利在当时杰出的分析学家面前提出的这个问题，好比一块试金石，通过它分析学家们可以检验其方法的价值，衡量他们的能力。约翰·贝努利因此而博得数学界的感谢。变分学的起源应归功于这个贝努利问题和相似的一些问题。"

约翰·贝努利是一位教育大师，在培养人才方面的业绩斐然：

18 世纪首屈一指的大数学家欧拉和法国著名数学家洛比塔都是他的得意门生；他的三个儿子和两个孙子都是数学家。长子尼古拉第三（Nicolaus Ⅲ），年仅30岁便被聘到彼得堡科学院任数学教授，曾在那里提出过一个概率论中的悖论问题，这个问题以“彼得堡悖论”闻名于世；次子丹尼尔（Daniel），25岁就成为彼得堡科学院教授，也是该院名誉院士，75岁时当选为瑞士皇家学会会员，他对概率论、微分方程、物理学、流体力学、植物学、解剖学都作出了卓越的贡献，曾先后荣获过法兰西科学院的十次奖励，被誉为数学物理方程的开拓者和奠基人；三子约翰第二（Johann Ⅱ）是巴塞尔大学数学教授；孙子约翰第三（Johann Ⅲ）年仅19岁被柏林科学院聘为教授，后来还兼任该院数学部主任；孙子雅科布第二（Jacob Ⅱ）是巴塞尔大学的实验物理教授。贝努利这个家族是数学史上最有名的数学家族，他们为建立和发展近代数学、物理和力学创下了不朽的功勋。特别是欧洲大陆上微积分的迅速普及和发展，多半应归功于这个家族的精心研究与大力推广。莱布尼茨曾认为雅科布、约翰兄弟在微积分方面所作的工作和他自己一样多。

泰勒 (Taylor,Brook)

(1685—1731)

泰勒是英国数学家。1685年 8 月18 日生于埃德蒙顿，1731 年卒于伦敦。



泰 勒

泰勒出生在富裕的家庭，经常有音乐家、艺术家来往，使他自幼就受到了良好的音乐艺术上的感染与熏陶。他1705年进入剑桥大学圣约翰学院学习，1709年毕业并获法学学士学位，随后移居伦敦。由于他在英国《皇家学会会报》发表一系列高水平的论文而崭露头角。27 岁时当选为英国皇家学会会员，1714 年获法学博士学位，1714—1718年任皇家学会秘书。这也是他的科研成果最多产的时期。为解决牛顿与莱布尼茨关于微积分发明权之争的问题，他被任命为仲裁委员会委员。

泰勒和牛顿，哈雷都是亲密的朋友，也是牛顿流数法的一位拥护者和推广者。

泰勒1715年出版了《增量法及其逆》，这本书发展了牛顿的方法，并奠定了有限差分法的基础。在这本书中载有现在微积分教程中以他的名字命名的单元函数的幂级数展开公式，这个公式是他通过对格雷戈里-牛顿插值公式求极限而得到的。用现代的标准衡量，证明有失严格，和他同时代人一样，他没有认识到在处理无穷级数时，必须先考虑它的收敛性，这在一百多年之后

才由柯西（Cauchy）给出一个严格的证明。另外，泰勒级数的重要性最初并未引起人们的注意。直到1755年欧拉把泰勒级数用于他的微分学时才认识到其价值；稍后拉格朗日用带余项的级数作为其函数理论的基础，从而进一步确认泰勒级数的重要地位。泰勒也以函数的泰勒展式而闻名于后世。在《增量法及其逆》中还讨论了微积分在物理上的许多应用，例如弦的振动。他还研讨了常微分方程的奇解等。

泰勒还研究过求方程近似根的方法，其中包括计算对数的一种巧妙方法。他研究过插值法的某些原理，引进有限差分的方法，并利用这一方法去分析弦的横向振动问题，以及光在非均匀介质中传播的微分方程问题，还导出了一根伸长的振动弦的基频。

泰勒在《皇家学会会报》上也发表过关于物理学、动力学、流体动力学、磁学和热学方面的论文，其中包括对磁引力定律的实验说明。泰勒还是一位富有才华的音乐家和画家。他曾将几何方法应用于绘画中的透视，并于1715年、1719年先后编写出版了《直线透视》、《直线透视的新原理》两本论著，这是关于透视画法的权威性著作。包含了对“没影点”原理最早的一般论述。他对空中屈折现象首先作出了正确解释。他还有未发表的论著《论音乐》，这是打算与牛顿合写论文的一部分。

泰勒的写作风格过于简洁，从而令人费解。这也是他的许多创见未能获得更高声誉的一个原因。

泰勒虽然生在富裕之家，但一生深受疾病及悲剧事件的困扰。第一个妻子因出身贫寒而遭到具有门阀观念的父亲的冷遇，导致父子之间激烈的争吵与不和，妻子不久死于分娩；第二个妻子后来也死于分娩。爱妻的不幸去世，父子的不和、疾病的折磨，使他痛苦不堪。到了晚年，为求解脱，便把精力与爱好转向了宗教和神学。

斯特林 (Stirling, James)

(1692—1770)

斯特林是英国数学家。1692年生于苏格兰斯特林郡，1770年12月5日卒于爱丁堡。

斯特林先在格拉斯哥，后在牛津大学受教育，由于他和詹姆斯二世党人 (Jacobites) 通信，被牛津大学开除，于是出走法国。在法国他结识了尼古拉第一·贝努利 (Nicolaus I Bernoulli)，后来被聘为数学教授。1715年曾去威尼斯学习，在那里他揭穿了威尼斯玻璃制造商的工艺秘密，之后发表《用落水法吹火机概述》。1725年回伦敦继续进行数学研究，次年被选为英国皇家学会会员。1735年任苏格兰采矿公司经理。1748年被选为柏林科学院院士。

斯特林在英国《皇家学会会报》上发表了大量论文，对数学作出了重要贡献。

斯特林在无穷级数和微积分理论方面取得了不少成就。他在《微分法兼论无穷级数的求和与插值》(1730年) 中，给出了一个级数，用今天的记号可写成

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{B_2}{1\cdot 2}\,\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\,\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\,\frac{1}{n^{2k-1}} + \cdots,$$

(其中B_k是贝努利数)。斯特林给出了前五个系数。并给出了一个决定后面系数的递推公式。虽然 $\log n!$的级数是发散的，但斯

特林却只用了级数的前几项就算出了 $\log_{10}(1000!)$ 等于 2567 加上一个准确到小数点后十位的小数。

特别值得指出的是，微积分中的马克劳林（Maclauric）定理早在马克劳林发表之前，斯特林在1717年对代数的研究以及1730年在他的《微分法兼论无穷级数的求和与插值》中就得到了这个定理；微积分学中的近似积分公式——辛普森(Simpson)公式，在辛普森发表之前，斯特林早就得到了这个公式以及一些更高阶的近似积分公式。

另外，他还给出了所谓斯特林公式。用今天的符号可写成：对于Γ函数$\Gamma(x)$，当x非常大时，有$\Gamma(x+1)\approx e^{-x}x^{x}\sqrt{2\pi x}$。由于当n为自然数时 $\Gamma(n+1)=n!$，所以对于自然数n有$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}e^{\theta/12n}$，$(0<\theta<1)$，其近似公式 $n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$。

斯特林对解析几何也作出了贡献。他在其《牛顿的三次曲线》（8卷，1717年）中，对牛顿列举的72种三次曲线作了补充，特别是把x和y的一般二次方程化为几种标准型。并证明了x和y的n次代数曲线由该曲线$n(n+3)/2$个点所决定，因为这种曲线有$n(n+3)/2$个本质系数。他还断言，任两平行线切割一条给定的曲线，它们的交点（实的或虚的）个数相同，而且他证明了，延伸到无穷远的曲线的分支的个数是偶数。他还证明了牛顿关于三次曲线所作的许多断言。

斯特林在《皇家学会会报》上发表的论文《关于地球的形状以及重力在其表面上的变化》（1735年）具有很高的科学价值。

马克劳林 (Maclaurin, Colin)

(1698—1746)

马克劳林是英国数学家。1698年2月生于苏格兰的基尔莫登；1746年1月4日卒于爱丁堡。



马克劳林

马克劳林是一位牧师的儿子，半岁丧父，9岁丧母，由其叔父抚养成人。叔父也是一位牧师。马克劳林是个“神童”。为了当牧师，他11岁考入了格拉斯哥大学学习神学，但入校不久却对数学发生了浓厚兴趣，一年后转攻数学。17岁取得了硕士学位并为自己关于重力作功的论文作了精彩的公开答辩；19岁担任阿伯丁大学的数学教授并主持该校马里歇尔学院数学系工作；两年后被选为英国皇家学会会员；1722—1726年在巴黎从事研究工作，并在1724年因写了物体碰撞的杰出论文而荣获法国科学院奖金；回国后任爱丁堡大学教授。

1719年马克劳林在访问伦敦时见到了牛顿，从此便成为牛顿的门生。1724年，由于牛顿的大力推荐，他继续获得教授席位。

马克劳林21岁时发表了第一本重要著作《构造几何》，在这本书中描述了作圆锥曲线的一些新的巧妙方法，精辟地讨论了圆锥曲线及高次平面曲线的种种性质。例如，证明了一条 n 次不可约曲线的二重点的最多个数是$(n-1)(n-2)/2$。还给出了各类更高重数多重点的个数的上界。他引进了代数曲线亏数的概念。还

推广了帕斯卡的六线形。1742年撰写的《流数论》以泰勒级数作为基本工具，是对牛顿的流数法作出符合逻辑的、系统解释的第一本书。此书之意图是为牛顿流数法提供一个几何框架，以答复贝克来（Berkeley）大主教等人对牛顿的微积分学原理的攻击。该书写得相当审慎周到，以致在1821年柯西的著作问世之前，一直是比较严密的微积分标准教材。著名的马克劳林级数就是在本书中提出的。他用牛顿的逐次微分法引入泰勒级数而得出，然后应用这个级数导出局部极大值和极小值存在的充分条件。他还首先给出如何区别一般极大极小的理论，并指出这种区别在曲线多重点理论中的重要性。在《流数论》中他把级数用作求积分的标准方法，并且独立于柯西得到了无穷级数收敛性的判别方法，他的方法是用几何形式给出的。在此书中还证明了等速旋转均匀流体的平衡形状是旋转椭圆体，现在称之为马克劳林椭圆体。马克劳林在《流数论》中，企图建立微积分理论的严密性，这无疑是值得赞扬的，而且在这方面作出了相当多的贡献。但是他和希腊人一样，常常用怀疑的眼光来看待无穷小概念，他相信大多数问题不依靠极限概念就能解决，因而试图根据希腊几何和穷竭法建立流数学说。不但他自己擅长于几何，而且也常劝别人多用几何，以致妨碍了更有力的分析的发展。

马克劳林的《代数论》一书中，开创了用行列式的方法解含有两个、三个和四个未知量的联立线性方程的先例。虽然书中的记叙法不太好，但是他的法则实质上就是我们今天所用的法则。只是后来克莱姆（Cramer）又重新发现了这个法则，所以后来叫克莱姆法则。

马克劳林给《皇家学会会报》写过不少论文，其中有论曲线的构造和度量的，还有论述所谓有奇异根的方程的。1740年发表的论文《论潮汐》使他与丹尼尔·贝努利、欧拉共享法国科学院的一项奖金。他还改进了奥克尼和谢特兰岛的地图。并且为保险公司进行统计方面的计算。马克劳林也是一位实验科学家，他设

计了很多精巧的机械装置。

马克劳林不但学术成就斐然，而且关心政治。1745年，当支持查理·斯图尔特 (Charles Stuart) 的苏格兰高地军队进攻爱丁堡时，他以非凡的勇气领导了这次保卫战，直到苏格兰高地的詹姆斯二世党人占领爱丁堡时，才被迫离开。但詹姆斯只得势一时，马克劳林很快又返回了爱丁堡。然而经过这次保卫战，他的健康已经受到损害，不久就逝世了。

马克劳林终生不忘牛顿对他的栽培，并为继承、捍卫、发展牛顿的学说而奋斗。他曾打算写一本《关于伊萨克·牛顿爵士的发现说明》，但未能完成便去世了。死后在他的墓碑上刻有“曾蒙牛顿的推荐”以表达他对牛顿的感激之情。

欧拉 (Euler, Leonhard)

(1707—1783)



欧 拉

欧拉是瑞士数学家、物理学家。1707年4月15日生于巴塞尔；1783年9月18日卒于彼得堡。

欧拉的父亲是一位爱好数学的基督教牧师。1720年，欧拉进巴塞尔大学学神学、医学和东方语言学。年轻时打算像父亲那样做一位牧师，但在大学里他结识了著名的贝努利数学家族的几位成员，引起了他对数学的强烈兴趣，从而放弃当牧师的念头而转攻数学。16岁时以优异的成绩获得巴塞尔大学硕士学位。先后担任过彼得堡科学院院士、柏林科学院物理数学所所长等职。

欧拉是数学上最多产的科学家。他从19岁开始写作，直到76岁逝世为止，一共发表了论著500多种，如果加上他生前未及发表和出版的手稿，则他一生的论著就有800多种之多。在他一生中的大部分年代里，平均每年约写出800页左右、高质量的、有创造性的著作和论文。《欧拉全集》共计72卷。

欧拉的论著不但数量多，而且涉猎面广。包括：代数、几何、数论、分析、微分方程、变分法、力学、光学、声学、热学、天文学、弹道学、航海科学、建筑学等等。其中有的曾荣获科学院大奖，有的是科学中里程碑式的经典之作。他是复变函数论的先驱者，变分方的奠基人，理论流体动力学的创始人。欧拉

的著名发现，可以列成一张很长很长的表。直到今天，我们在数学和其它学科中，常常可以看到以欧拉的名字命名的公式、定理和方程。美国数学史家克来因（Kline）说："没有一个人象他那样多产，象他那样巧妙地把握数学；也没有一个人能收集和利用代数、几何、分析的手段去产生那么多令人钦佩的成果。他是顶呱呱的方法发明家，又是一个熟练的巨匠"。

在微积分学方面：继牛顿和莱布尼茨研究提出微积分之后，很快出现了许多毫无联系的数学成果有待整理。欧拉通过他的《无穷分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》等著作，把前人的发现加以总结定型并注入了自己的见解。例如，他基于量的代数关系给出了函数概念的新定义。并引入了数论中重要的欧拉函数φ（n）。他首创了对函数 $\log x$ 与 e^x 的现代讲法并发现了 $\log x$ 是无穷多值的。他导出了三角函数和指数函数之间的联系，即著名欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$。他首先把导数归作为微分学的基本概念。他提出了二阶偏导数的演算，并给出了关于微分后的结果与微分次序无关的理论，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 的条件，但未给出证明。研究了二元函数的极值，给出了全微分的可积条件。确定未定式 $\frac{\infty}{\infty}$、$\infty-\infty$ 的极限运算规则。引出了很多函数的无穷幂级数和无穷乘积的展式。积分作为原函数的概念是欧拉创建的。在不定积分中居于中心地位的是把积分表示为初等函数的各种方法与技巧，欧拉曾确定出这些方法的范围，今天在微积分教程中所叙述的方法与技巧，几乎都可以在欧拉的作品中找到。他发展了定积分的理论，并演算了大量的广义积分，如 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$，从而奠定了Γ函数与B函数的理论基础。证明了椭圆积分的加法定理。他给出了用累次积分计算二重积分的方法，并讨论了二重积分的变量替换问题。他研究了函数用三角级

数表示的方法，他还提出了积分因子的概念，并确定了可采用积分因子的方程类型，证明了凡是可用分离变量求解的微分方程都可以用积分因子求解，但反之不然。他还考虑了求解常系数一般线性方程的问题，研究了解微分方程的级数解法。总之欧拉的功绩在于：用形式化方法把微积分从几何中解脱出来，使其建立在算术和代数的基础之上，从而为完整实数系统作为微积分学的基本论证打通了渠道。他的《无穷小分析引论》是第一部最系统的分析引论，包括学习微积分所必需的预备知识，如三角、代数、平面、立体解析几何等。

欧拉的著作，不但包含许多开创性的成果，而且在表述上思路清晰，极富有启发性。他的行文优美而流畅，把他那些丰富的思想和发现表露得淋漓尽至，且妙趣横生。因此人们把欧拉誉为"数学界的莎士比亚（Shakespeare）"。

欧拉具有坚韧的毅力。为了计算彗星轨道，这是需要用好几个月的时间计算才能完成的问题，但欧拉以自己创立的方法，奋战三日就完成了。过度的工作，使他患了眼疾，右眼不幸失明了。但他不顾眼疾，毅然回到严寒的彼得堡工作。这样左眼视力很快衰退，他深知自己的双眼将完全失明，但并没有消沉，而是抓紧还能朦胧看见东西的最后时光，在黑板上疾书他发现的公式，口述其内容，让人笔录。后来双目都失明了。不幸的事又接踵而来：1771年彼得堡失火殃及欧拉的住宅，书籍和大量手稿全部焚毁；1776年爱妻柯黛玲娜(Catharina)病故，在这些不幸面前，欧拉仍没有退缩，而是以坚韧的毅力奋斗着、拼搏着。他凭借惊人的记忆力和罕见的心算能力，艰苦卓绝地从事研究，继续让人笔录他的发现，直到他生命的最后一刻。在双目失明的17年中，他竟口述了400篇左右的论文和好几本专著，并完成了曾使牛顿头痛的《月球运动理论》。因此，纽曼（Newman）称欧拉是"数学家之英雄"。

欧拉重视人才，奖掖后生。"等周问题"本是欧拉多年潜心

研究的问题。当他收到年仅19岁的拉格朗日的来信，信中对“等周问题”提出了与欧拉方法不同的新颖解法，立即博得了欧拉的热情赞扬，他谦逊地压下自己在这方面的作品暂不发表，使拉格朗日的工作得以发表和流传。欧拉后来又向腓特烈大帝(Frederick the Great) 推荐年仅30岁的拉格朗日来接替他任的柏林科学院物理数学所所长的职务，从而使拉格朗日的才华大展。

有人可能会想：欧拉著述如林、成果累累可能是牺牲了所有其它生活乐趣而换取的。其实不然，他结了婚，并且是13个孩子的父亲，他经常关心他的家庭、很重视教育儿孙们，给他们作科学游戏，唸圣经给他们听，一起欢度黄昏。

欧拉在科学上的卓越贡献以及他高尚的品德，为世人所崇仰。在他晚年的时候，几乎欧洲所有的数学家都把他尊称为老师。法国著名数学家拉普拉斯 (Laplace) 就向青年们多次说过：“读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师。”德国大数学家高斯 (Gauss) 还说过：“对欧拉的工作的研究，是科学的不同范围的最好学校，没有任何别的可以代替他。”

欧拉认为一个科学家：“如果是做出了给科学宝库增加财富的发现，而不能坦率阐述那些引导他做出发现的思想，那么他就没有给科学做出足够的工作。”

辛普森 (Simpson, Thomas)

(1710—1761)

辛普森是英国数学家。1710年8月20日生于波士沃希；1761年5月14日卒于波士沃希。

辛普森在家乡只受过初等教育，他的父亲是一个织布工人并想培养他也成一名织布工，但他坚持读书，遭到父亲的强烈反对，于是愤然离开家庭。不久他在一个小贩处得到一本数学书，从此开始钻研数学，并对占星术产生了兴趣，以致不久就成了一个小有名气的算命先生。后来同他的女房东结了婚，她是一个寡妇，辛普森只比她的儿子大两岁。大约在1733年，他搬到了德贝并在这里恢复了织布行业的工作，晚上在一个夜校教书。

1736年初，辛普森移居到伦敦。

1736年，他的第一批数学论文在著名的杂志《处女作》上发表了，其中的一篇表明了他已精通流数术，这篇文章引起了人们的关注。1737年，出版了他的第一本书《流数的一种新处理方法》。此书在给出一些预备定义后，便定义流数如下："一个流动的量，按它在任何一个位置或瞬时所产生的速率（从该位置或瞬间起持续不变），在一段给定的时间内，所均匀增长的数量称为该流动量在该位置或瞬间的流数。"用今天的话说，辛普森是用 $(dy/dt)\Delta t$ 来定义微分的。他还认识到把流数仅仅看成速度，思想将局限于具体的一点上，如不加以注意，就将陷入哲学上的困境。

1740年，他出版了《概率的规律》和《短篇论文集》，前者是18世纪概率论方面一本重要著作。1742年和1743年，他又先后出版了《年金论和将来享有权》和《数学论文》。这些论著的出

版，使他的声誉不断提高。1743年 8 月被聘为乌尔威治皇家陆军军官学院教授，1745年被选为皇家学会会员。

辛普森也是一位很有成就的数学教师。曾连续写了三本畅销一时的数学教科书：《代数学》、《几何学》、《三角学》。这三本书不但在英国多次再版，而且还在法国、美国、德国等国出版。

辛普森赢得了英国“能干的分析学家”的称号。他1750年出版的《流数学及其应用》在英国获得了很高的声誉。当他读了由法国数学家洛比塔写的《无穷小分析》后，意识到和欧洲大陆数学家之间进行交流的重要性。他在最后一部著作《综合文集》的序言中写道：“由于在现代分析学领域中的勤奋耕耘，……，外国数学家们近来已经能够把他们在许多方面的研究推进得比伊萨克·牛顿先生和他在本国的追随者所作到的更先进了……。”

在定积分近似计算中，以他的名字命名的“辛普森公式”，虽早在他之前牛顿的学生科茨（Cotes）和斯特林就已经得出了（包括一些更高阶的近似公式），但真正广泛地为人所知并加以应用，则是1743年辛普森重新发现之后的事了。

辛普森的工作使牛顿的微积分学说得到了进一步完善。1760年辛普森在参与桥梁工程设计工作中劳累过度，得病后医治无效，于1761年 5 月14日逝世。

克莱罗 (Clairaut, Alexis-Claude)

(1713—1765)

克莱罗是法国数学家、天文学家。1713年5月7日生于巴黎；1765年5月17日卒于巴黎。


克莱罗

克莱罗的父亲是一位教师，也是几何学家和柏林科学院通讯院士。克莱罗从小聪敏好学受到其父良好的数学启蒙。他是个“神童”，童年就读完了洛比塔著的《无穷小分析》。13岁时向法国科学院提交了一篇关于研究四次曲线的论文。16岁写出《关于双重曲率曲线的研究》一书（此书两年后出版），法国科学院对这部著作给予很高的评价，因而当克莱罗刚满17岁时，就被破格选为法国科学院院士（按当时的规定，入选的院士应该不小于20岁）。

克莱罗在数学上表现出非凡的才华：他的《关于双重曲率曲线的研究》一书开创了空间曲线的理论，在此书中用解析的方法描述了空间曲线的基本问题。几何上他把一条空间曲线看作是两个曲面的交线，分析上把每个曲面的方程表为一个三变量的方程。他把空间曲线叫做“双曲率曲线”，并研究了双曲率曲线的切线。他领悟到一条空间曲线在一个垂直于切线的平面上可以有无穷多条法线。这本书对推动三维几何的发展起到了很大作用。

克莱罗对微积分作出了如下的贡献：他是创造偏导数理论的

数学家之一，得到了$dz=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$是全微分的条件当且仅当$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$。得到了混合二阶偏导数的求导次序可交换的条件。空间曲线弧长的表达式以及某些曲面面积的求积公式也是属于他的。他在《关于地球形状的理论》中首次引进了曲线积分。他曾用级数解法求得所谓三体问题的近似解，并把结果用于计算哈雷彗星到达近日点的日期，取得极大的成功，并为此获得彼得堡科学院的奖励。1757年，他在研究太阳而引起的振动时，大胆的采用了三角级数$f(x)=A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos x$，并得出了三角级数的系数公式$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx dx$。他引进了一阶微分方程的通解和特解的概念，对奇解进行了全面的研究。他在1734年的一本论著中，引进了现在微分方程教材中的所谓克莱罗方程。他给出了求解微分方程的一些重要方法，还给出了微分方程为全微分方程的条件，独立地引进了积分因子的概念。

克莱罗写过很多关于微积分的重要论文。其中主要的是《关于极大和极小的一些问题》（1733年），是变分学中的一篇重要文献并叙述了变量计算的历史；《积分学的一般研究》（1739年），也有很高的学术价值，其中论述了积分因子。他编著的两本初等数学教材：《代数学原理》（1749年）和《几何学原理》（1765年）也独具风格，先后被译成英文，流传于世。

克莱罗对天文学也作出了卓越的贡献：25岁时，他随同德穆佩图斯（de Moupertuis）到拉普兰远征，去测量对应于一度的地球子午线的长，从而证实了牛顿-惠更斯关于地球在两极是扁平的结论。克莱罗回法国后于1743年发表了权威性著作《关于地球形状的理论》，在这本书中他以比牛顿和马克劳林更完美的形式，论述了旋转体的形状，提出了所谓克莱罗大地测量基本定

律。克莱罗对月球的运动、哈雷彗星的运动、太阳摄动等一系列问题所进行的卓有成效的研究，对欧拉一直未能解决的月球拱点进动问题给出的解答，都载入了天文学史册。1752年他写的《关于月球的理论》还荣获彼得堡科学院奖，在这篇论文中对月球运转作出了美妙而正确的数学描述。

克莱罗曾把牛顿的《自然哲学的数学原理》一书翻译成法文，并为它作了注解。

克莱罗的一个兄弟也是“神童”，9岁就写数学论文，但可惜12岁就夭折了。

达朗贝尔（D′Alembert, Jaen Le Rond）

（1717—1783）

达朗贝尔是法国数学家、力学家、哲学家。1717年11月17日（另一说16日）生于巴黎；1783年10月29日卒于巴黎。



达朗贝尔

达朗贝尔是贵族希凡利·得斯陶切斯的私生子，出生后被遗弃在巴黎圣让勒隆（Saint Jean Le Rond）教堂附近的路旁，幸被一位宪兵发现，这位好心的宪兵即以其发现的地名给他起了教名，然后交给了一位贫穷而又善良的玻璃匠抚养。玻璃匠不但抚养他长大，并且送他上学（其中也得到其生父的暗中资助）接受正规教育。达朗贝尔1735年毕业于马扎林学院，早先研究医学和法律，并当过律师，后来转攻数学和自然科学，他的数学几乎全靠自学。22岁时向法国科学院呈交了关于固体在流体中的运动与积分学方面的两篇论文。在第一篇论文中，他提出了绕圆柱体无环量流动问题，即著名的"达朗贝尔疑题"。这篇论文受到科学院的高度评价。1741年，年仅24岁便当选为法国科学院院士。1754年，被选为法兰西学院院士，1772年任该院的终身秘书。他的才能表现出来后，他的生母试图认他，但遭到了达朗贝尔的毅然拒绝，他说："玻璃匠的妻子是我的母亲。"普鲁士国王腓特烈二世（Frederick Ⅱ）多次邀请他担任柏林科学院院长，1762年俄国女皇叶卡捷林娜（Catheri-

ne）邀请他去任皇子的家庭教师，他都谢绝了。

达朗贝尔是数学和力学的大师。

在数学方面，他针对当时人们对微积分的基础缺乏严密性掉以轻心，提出了尖锐的批评。他说："直到现在……，表现出更多关心的是去扩大建筑，而不是在入口处张灯结彩；是把房子盖得更高些，而不是给基础补充适当的强度。"他推进了牛顿的极限概念。并认为"极限的完整理论对于把分析置于牢固的基础上是完全必要的。"他称一个量为另一个量的极限，就是后者趋向前者，比任何给定的量都更接近于前者，但不等同于前者。他说微分学的基础同流数法一样，可以建立在极限的概念之上。"求方程的导数只要求方程中所包含的两个变量的差分比的极限。"他第一个把导数明确定义为增量比的极限，认为这是微分学的真正理论基础。他实质上把微分学建立在"理性的"极限观念上。为此马克思曾说达朗贝尔脱下了微分学的神秘外衣。达朗贝尔的观点和工作为使欧洲大陆上的微积分转变到以极限为中心的思想上来，起了极积作用。达朗贝尔提出应区别对待收敛级数和发散级数，并对随便使用发散级数表示了怀疑；他给出了级数$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$绝对收敛的一个检验法，即现行微积分教材中所介绍的达朗贝尔准则。他在1744年与1745年的动力学著作中推广了偏导数的演算。对于常微分方程，他加强了从特殊积分鉴别奇解的判别法，研究过黎卡提（Riccati）方程，研究过那些可以用有限个初等函数表示其解的常微分方程，并把椭圆积分列入了可接受的解答中。他得出了描述弦横向振动的二阶偏微分方程的解法。他与欧拉、丹尼尔·贝努利共同奠立了数学物理的基础；在解流体力学中的一个椭圆型偏微分方程时，他首先运用了复变函数；他与欧拉最先得出了解析函数实部与虚部的一些基本方法并发现复变函数可微的条件。在代数中，他得出了代数基本定理的辅助定理。

在力学方面，达朗贝尔原理是基本原理之一，它包含1743年

的《动力学论文》中，大大改进了动力学的一般推导。1744—1747年他发表了《关于风的成因的推论》的论文，因而荣获柏林科学院奖，并被选为该院院士。在天文学方面，他建立了行星摄动的理论，并对二分点和章动的问题作了严格解释。在哲学上，他赞成感觉性学说，反对笛卡儿的天赋观念论，其著作有《哲学原理》。

达朗贝尔是18世纪法国《百科全书》的编纂人。他主张按培根（Bacon）的原则，将人类知识分为历史、哲学（科学）、美术三大类；强调技术和科学的关系，并指出《百科全书》的目的不仅在于提供知识，而更重要的在于改变读者的思想。这套百科全书的出版，对普及科学知识，改变社会舆论，动摇王位权势，推翻神坛礼义，推动社会文明和进步，都起到了很大作用。

达朗贝尔是18世纪思想启蒙运动的杰出代表。他的名言“向前进，你就会产生信念。”不但鞭策了他自己，而且也鼓舞了许多有志之士，特别是青年人。

拉格朗日（Lagrange, Joseph-Louis）

（1736—1813）


拉格朗日

拉格朗日是法国数学家、力学家、天文学家。1736年1月25日生于意大利西北部的都灵；1813年4月10日卒于巴黎。

拉格朗日的祖父是法国人、祖母是意大利人。他的父亲是一位富商，曾想把拉格朗日培养成自己商业上的接班人，因此希望他学法律。但拉格朗日在中学时代读了天文学家哈雷写的一篇谈论计算方法的小品文——《在解决求光学玻璃的焦点问题时，近世代数优越性的一个实例》之后，就对数学和天文学发生了兴趣，不久进入都灵皇家炮兵学院学习。通过自学的方式钻研数学，尚未毕业就担任了该院的部分数学教学工作。18岁时开始撰写论文，19岁被正式聘任为该院的数学教授。

1755年，拉格朗日开始和欧拉通信讨论"等周问题"，从而奠定了变分法的基础。

1757年，拉格朗日和几位年轻科学家创办了都灵科学协会和学术杂志《都灵文集》，在《都灵文集》上他发表了大量论文，1764年和1766年因在天文学研究中取得的成果，先后两次获得法国科学院奖，从而在世界范围赢得了很高的声誉。

1766年，在柏林科学院物理数学所任所长的欧拉，要重回彼得堡，临行前普鲁士国王腓特烈大帝（Frederick the Great）要欧拉推荐一位称职的继任者。欧拉认为非拉格朗日莫属，同时达朗贝尔也作了同样的推荐。于是腓特烈大帝亲自写信给拉格朗日说："欧洲最伟大的君王希望欧洲最伟大的数学家到他的宫廷里来。"于是拉格朗日到了柏林，就任柏林科学院物理数学所所长职务，这时他年仅30岁。

拉格朗日在柏林科学院整整工作了20年，在这期间，他对代数、数论、微分方程、变分法、力学和天文学都进行了广泛而深入的研究，并取得了丰硕的成果，其作品浩如烟海。

对于微积分学，拉格朗日试图抛弃自牛顿以来模糊不清的无穷小概念。为此他写成《解析函数论》。此书的副标题是："不用无穷小，或正在消失的量或极限与流数等概念，而归结为有限的代数分析的艺术"。他试图把微分、无穷小和极限等概念从微积分中完全排除。他先用代数方法证明了泰勒展开式，接着定义导数（微商）是$f(x+h)$的泰勒展开式中h的系数，然后建立起全部分析学。他认为这样就可以克服极限理论的困难。可是无穷级数的收敛问题，仍然无法逃避极限。尽管他的"纯代数的微分学"没有成功。但他另辟蹊径的探讨得到高度的赞赏，因为这对后来微积分基础理论的逻辑发展产生了深远的影响。特别是《解析函数论》对函数的抽象处理，可说是实变函数论的起点。他还给出了泰勒级数的余项公式，研究了二元函数极值，阐明了条件极值的理论，并研究了三重积分的变量代换等问题。

在微分方程中，他也获得了很多重要结果：例如，对奇解与通解的联系作了系统的研究，用明确而漂亮的手法从通解中消去常数而得到奇解，从而给出了一般性的方法；他还发现，线性齐次方程的通解是一组独立的特解的线性组合，而且在知道了n阶线性齐次方程的m个特解后，可以把方程降低m阶；在解线性非齐次微分方程时，他提出了常数变易法。

拉格朗日对代数和数论曾作出过杰出贡献。他的《关于方程的代数解的研究》，开辟了代数发展的新时期。

拉格朗日最得意的著作是《分析力学》，撰写这部巨著，他倾注了大量的智慧和精力，整整经历了 37 个春秋。在这部著作中，他利用变分原理，建立了优美、和谐的力学体系，把宇宙描绘成为一个由数字和方程组成的有节奏的旋律。这部著作里的精辟论述，使得动力学这门科学达到了登峰造极的地步，它还把固体力学和流体力学这两个分支统一了起来，从而奠定了现代力学的基础。哈密顿（Hamilton）把这部著作誉之为一部"科学诗篇"。

拉格朗日1759年被选为柏林科学院院士，1772年被选为法国科学院院士，1776年被选为彼得堡科学院名誉院士，1766—1786年担任柏林科学院的主席。

拉格朗日虽然是一个伟大的天才，但他非常谦逊，虚怀若谷，善于向前辈及同时代的科学家学习，不断地从各个学科吸取营养丰富自己，因此他的研究充满了诗人般的想象力。由于他在学术上成就辉煌，道德上品格高上，赢得了世人的崇敬。例如，1793年 9 月法国资产阶级革命政府颁布一项法令：将一切在敌国境内出生的人驱逐出境并没收其财产，但特别声明尊贵的拉格朗日先生除外。

拉格朗日在逝世前的两天曾平静地说："我此生没有什么遗憾，死亡并不可怕，它只不过是我要遇到的最后一个函数。"

拉格朗日去世后，意大利百科全书说他是意大利数学家，法国百科全书说他是法国数学家，德国的数学史说他一生的主要科学成就是在柏林完成的。拿破仑（Napoleon）赞美"拉格朗日是一座高耸在数学世界的金字塔。"

拉普拉斯（Laplace，Pierre-Simon）

（1749—1827）


拉普拉斯

拉普拉斯是法国数学家、天文学家、物理学家。1749年3月23日生于博蒙昂诺日；1827年3月5日卒于巴黎。

拉普拉斯家境贫寒，靠邻居的周济才得到读书的机会。16岁时进入开恩大学，并在学习期间写了一篇关于有限差分的论文。在完成学业之后，他带着介绍信从乡下到巴黎去求见大名鼎鼎的达朗贝尔，荐书投去，杳无音讯。拉普拉斯并不气馁，随即写了一篇阐述力学一般原理的论文，求教于达朗贝尔。由于这篇论文异常出色，达朗贝尔为其才华所感，欣然回了一封热情洋溢的信，信中有这样一句："你用不着别人的介绍，你自己就是很好的推荐书。"达朗贝尔还很高兴的当了他的教父，并介绍他去巴黎陆军学校任教授。拉普拉斯事业上的辉煌时期便从此开始。1773年被选为法国科学院副院士；1783年任军事考试委员，他曾主持一个从16个考生中评选出一个的考试，结果被选中的就是后来成为皇帝的拿破仑（Nopoleon）；1785年当选为法国科学院正式院士；自1795年以后，他先后任巴黎综合工科学校和高等师范学校教授；1816年被选为法兰西学院院士，一年后任该院主席。他还被拿破仑任命为内政部长，元

老议员并加封伯爵。拿破仑下台后，路易十八（Louis XⅧ）重登王位，拉普拉斯又被晋升为侯爵。

拉普拉斯才华横溢，著作如林，在青年时代就发表了一系列的论著。24岁当选为法国科学院副院士，科学院在一份报告中曾这样评价他：还没有任何一位象拉普拉斯这样年轻的科学家能在如此众多如此困难的课题上，写出如此大量的论文。

拉普拉斯的研究领域是多方面的，有天体力学、概率论、微分方程、复变函数、势函数理论、代数、测地学、毛细现象理论等，并有卓越的贡献。他是一位分析学的大师，把分析学应用到力学，特别是天体力学，获得了划时代的结果。他的代表作有：《宇宙体系论》、《分析概率论》、《天体力学》。

《宇宙体系论》（1796年）是一本解释宇宙的、文字通俗的科普读物。他所提出的太阳系生成的星云假设说就收集在此书的附录里。这一假说1755年康德（Kant）虽已述及，但康德主要是从哲学的角度加以考虑的，而拉普拉斯则是从数学、力学的角度进行推导的，这不但充实了星云假说的内容，而且作出了详细的科学论证。因此，人们常把这一假说称为"康德-拉普拉斯星云假说。"

《分析概率论》（1812年）汇集了40年以来概率论方面的进展以及拉普拉斯自己在这方面的发现，对概率论的基本理论作了系统的整理。这本书包含了几何概率、贝努利定理和最小二乘法原理等。著名的拉普拉斯变换就是在此书中述及的。1814他还出版了《概率的哲学探讨》。他被公认为是概率论的奠基人之一。

《天体力学》共有五卷。这部巨著把牛顿、达朗贝尔、欧拉、拉格朗日诸位大家的天文研究推向了高峰。用拉普拉斯自己的话来说，写这部书的目的在于对太阳系引起的力学问题提供一个完全的解答。它吸取了前人的大量成果，给予天体运动以严格的数学的描述，对位势理论同样作出了数学刻画。这对后来物理学、引力论、流体力学、电磁学以及原子物理等，都产生了极为

深远的影响。在位势理论中他提出了有名的“拉普拉斯方程”。这部巨著使他赢得了“法国的牛顿”的美称。围绕这部著作流传有不少故事：有一次拿破仑指责他说：“拉普拉斯先生，有人说你这部书中，从未提到上帝是宇宙的创造者。”拉普拉斯幽默的答道：“陛下，我不需要作这个假设。”哈密顿读了《天体力学》，17岁便写文章订正其中的一个错误，从此开始了自己的数学生涯；格林（Green）则从《天体力学》受到启发，开始将数学用于电磁学；美国天文学家鲍迪奇（Bowditch）在翻译了《天体力学》之后说：只要一碰到书中“显而易见”这句话，我就知道总得花几个小时冥思苦想去填补这个空白。

拉普拉斯对解释世界的任何事情都感兴趣。他研究过流体动力学、声的传播和潮汐现象。在化学方面，他关于物质液态的论著是经典之作。他关于毛细管中使水上升的表面张力的研究以及在液体中内聚力的研究，都有重大的发现。他研究过复变函数求积法，并把实积分转换为复积分来计算。拉普拉斯方程更是重要的微分方程。他研究了奇解的理论，把奇解的概念推广到高阶方程和三个变量的方程，发展了解非齐次线性方程的常数变易法，探求二阶线性微分方程的完全积分。拉普拉斯也很重视研究方法，他十分爱用归纳和类比。他曾说：“甚至在数学里，发现真理的主要工具也是归纳和类比。”

拉普拉斯在政治上是一个机会主义者。在法国大革命时期，随着政局的动荡、改朝换代，他也随波逐流，反复不断地扮演了共和派与保皇派的双重角色。每次改宗后他都能获得更好的差使和更大的头衔。为此有人把他比做英国文学作品中的假圣人布雷牧师。拿破仑在流放期间说过：“拉普拉斯是第一流的数学家，但事实很快表明他不过是一个平庸的执政官，……，他把无穷小精神带进了政府之中。”拉普拉斯的另一个缺点是：在他的著作中，他常常完全不提前人和同时代人的论述与功绩，给人的印象是其著作中的思想似乎完全出自于他本人。例如，他在《天体力

学》中不声不响地从拉格朗日那里取用了位势概念，并把这一概念用得十分广泛，以致从他那时起，势论中的基本微分方程被人称作拉普拉斯方程。他在《分析概率论》中，引用别人的成果也不提及别人的名字，而是把它们同自己的成果混在一起。他的这些品格遭到了后人的非议。

拉普拉斯虽有上述缺点，但作为一个科学家，在席卷法国的政治变动中，包括拿破仑的兴起和衰落，都并未显著地影响他对科学的研究。另外他也能慷慨帮助和鼓励年青的一代。例如，化学家盖-吕萨克（Gay-Lussac）、旅行家和自然研究者洪堡尔晓（Humboldt）、数学家泊松（Poisson）、柯西都曾得到过他的帮助和鼓励。他学识渊博，但学而不厌。他的遗言是："我们知道的是微小的，我们不知道的是无限的。"他曾强调指出："认识一位巨人的研究方法，对于科学的进步，……并不比发现本身更少用处。科学研究的方法经常是极富兴趣的部分"。

勒让德 (Legendre, Adrien-Marie)

(1752—1833)

勒让德是法国数学家。1752年9月18日生于巴黎（另一说图卢兹）；1833年1月10日（另一说9日）卒于巴黎。



勒让德

勒让德出生在富裕的家庭。1770年毕业于马扎林学院，曾任巴黎军事学院的数学教授。1782年以《关于在阻尼介质中的弹道的研究》的论文获得柏林科学院的奖，1783年被选为法国科学院助理院士，两年后当选为院士，1789年当选为英国皇家学会会员，1795年任巴黎综合工科学校教授，他还担任过政府委员。

勒让德对分析、数论、变分法、球面三角等作出了出色的贡献。

勒让德对椭圆积分有特殊的兴趣，可以说他把一生中的黄金时期都献给了这个课题，并在这方面获得硕果累累，他最早一批成果包含在1786年写成的论椭圆弧的两篇论文里。他的《积分练习》、《椭圆函数研究》以及三篇阐述关于阿贝尔（Abel）与雅可比（Jacobi）在1829年与1832年的工作的补充论文，都是椭圆积分的开拓性研究。他提出了三种基本类型的椭圆积分，并证明了每个椭圆积分可以表为这三类积分的组合。他在这方面的工

作，不但为高斯等人在这个领域的研究开辟了道路，而且为数学物理提供了基本的分析工具。

勒让德于1786年在其论文《关于在变分学中区分极大和极小的方法的报告》中，建立了判断极大极小的条件。欧拉曾对一元函数的泛函达到极大极小找到了一个必要条件，1755年勒让德对二元函数的泛函也找到了这个条件，并且给出了区分极大和极小的判据。勒让德的这项工作极大地鼓舞了高斯、泊松、柯西、雅可比等人，使他们在这方面进一步做了很多工作。

勒让德的《数论》（1790年出版、1830年出第3版）被誉为代表18世纪数论研究的最高成就的名著。这部书共两卷、分四部分，是当时对数论的最全面的论述。第一部分是连分数的理论，后来被用于解不定方程。第二、三部分讨论了数的一般性质，证明了用以确定整数因子的二次剩余的互换定律，高斯称这一定律是数论中的一颗明珠，这个定律是继费尔马（17世纪的）工作之后，数论中最重要的成果。第四部是关于素数的个数问题，其中有勒让德的著名经验公式。他的这部著作与高斯的《算术研究》同为数论中的经典名著。

1783年，勒让德在测定旋转椭面在矢径方向的拉力时，发现了一类多项式，称为勒让德多项式，并说明它们具有一系列的良好性质。他还研究了B函数和Γ函数，并得到了Γ函数的倍量公式。1785年他写了一本关于椭球之间引力的著作《同类球体吸引力研究》，这一著作举世瞩目，而他也被公认为第一流的数学家，并因此被选为巴黎科学院院士。

勒让德曾参与测量格林威治到巴黎的距离的工作。这一测量是以球面三角为数学工具的。为完成这一任务，他开创了大地测量学，建立了球面三角学中的基本定理。在他的《关于确定彗星轨道的新方法》中，已有了最小二乘法的思想萌芽，因此，实际上他比高斯更早地发现了最小二乘法原理，只不过高斯使之更为完善并得到了更广泛的应用。他的论文《行星图研究》也有很大的

科学价值。

勒让德撰写的《几何原理》是初等几何方面最脍炙人口的一本名著，他重新组织并简化了欧几里得《几何原本》中的许多命题。此书与欧几里得《几何原本》不同之处，在于它使几何代数化和算术化了，并使用了对称性原理。据说这本书对高斯产生过很大影响，并在欧洲和美国很受欢迎。在这本书中，给出了 π 是无理数的简单证明，并首次证明了 π^2 也是无理数，他还猜想 π 不是任何有理代数方程的根。

勒让德还是一位热衷于数学用表的数学家，在他的《积分练习》第三卷中，就曾精心地作出椭圆积分表。

勒让德为人谦逊，一生保持热情而有节奏的工作。虽然他曾在对待阿贝尔《论一类广泛的超越函数的一般性研究》由于缺乏热情与认真，常受到后世的批评。但1830年他已年近80，编成《椭圆函数论》也即将付印，他得知阿贝尔和雅可比关于椭圆函数的研究工作已经公诸于世，便找来看。看后，很坦荡地说：阿贝尔和雅可比在这方面的研究比自己好，还发表了补充性的文章。他的这种风格也很受后人的推崇。由于他在各个数学分支所取得的卓越成就，特别是在分析学方面的重大创造，以他的名字命名的定理、公式是不胜枚举的。他与法国的另外两位著名数学家拉格朗日、拉普拉斯，都是由于在数学上成就卓著而享有盛名，而且他们三人的名字的第一个字母均为L，故常把他们称为法国数学界的“三L”。

卡诺（Carnot, Lazare Nicolas Marguerite）

（1753—1823）

卡诺是法国数学家、军事家。1753条5月13日生于布尔戈尼（另一说诺雷）；1823年8月2日卒于马德堡。



卡 诺

卡诺出生在一个地方公证人的家庭，早年从军并进入梅济耶尔军事学院学习。在该校受到著名几何学家蒙日（Monge）的指导，并鼓励他研究数学。1773年毕业、授予中尉衔。后来长期在军队中服务。

卡诺是1789年法国大革命的积极参加者，是一位严厉而不妥协的共和党人，在拿破仑政权中担任过许多要职：众议院议员、军政部长、安特窝普要塞司令官，后来又以伯爵身份出任内政部长。1793年，当联合的欧洲出动百万部队进攻法国时，他受任组织14个兵团成功地进行了反击，从而赢得了“革命将军”和“胜利组织者”的称号。他也是1793年投票反对拿破仑称帝的唯一护民官。复辟后，他被放逐，1823年8月2日在贫困的境遇中死于马德堡。

卡诺一生酷爱数学，甚至在保卫革命成果的艰难岁月也没有放弃对数学的刻苦钻研，他对分析和几何都作出了突出贡献。

在分析方面，他于1797年发表了《关于无穷小分析的形而上学的思考》。这是一部虽谈数学但却更富有哲理趣味的著作，通俗

易懂，畅销不衰，连印数次，并译成多种文字。鉴于当时流行的有关微积分学的论著缺乏明确性和统一性，卡诺企图搞出一套严格精确的理论。为此，他在这部书里，详细的论述了“无穷小”的概念。他说：“数学中叫做无穷小的量，既不是真正在消失的量，甚至也不是真正的小于某个有确定值的量，而只是这样的量：根据该问题和命题的条件进行计算时，为了求在这些量的值变化时量与量之间的比，在计算过程中这些量始终是变化的，并且是在连续的变小，直到变成任意小。被称作无穷小的那些量的真正的特征只在这里，完全不在于那个从它们的名称看似乎实际应该具有的“小”上，也不在于假定无穷小能够接受的那个“绝对小”上。因此我们可以看到，无穷小量的概念是简单的，没有任何不确定和引起争论的想法。”按照卡诺的看法，此定义能阐明无穷小概念的正确性。与此同时，他研究和评述了历史上形成的各种无穷小量的方法，并将穷竭法用到各种已知辅助量的类似系统。他认为：“牛顿的最初和最终比法，除了引入一些引理以避免二重归谬法的论证外，”与穷竭法是相似的；卡瓦列利和罗伯瓦的方法也是穷竭法的繁衍；笛卡儿的待定法与无限小分析十分接近，因为后者只是前者的一个有效的应用；极限法与最初和最终比法无甚差异，因此它也是穷竭法的一种简化。他认为这些方法都通向无限小分析所得的结果，只是走了一条艰难而迂回的的道路。他还看出拉格朗日方法与微分学有关联，因为它略去了无穷级数中其它各项。因此，他觉得各种不同观点仅仅是穷竭法的另一种形式的体现或缩影，最终使其成为一种方便的计算方法而已。他还大量地注释了莱布尼茨对微分的解释。他的这些分析和结论虽然不完全正确，但在某种程度上为19世纪初数学分析的改革起到了推动作用。

卡诺在几何学方面有三部重要作品：《关于几何图形的相互关系》、《位置几何学》、《关于横截理论》，分别发表于1801年、1803年、1806年。在《位置几何学》中，他开辟了一个全新

的园地，导出了著名的完全四边形和完全四角形的性质。在此书中，有指向的量第一次被系统地应用于综合几何中。在《关于横截理论》中，卡诺把梅内劳斯(Menelaus)的定理扩展到：以任意的几次代数曲线代替那个定理中的横截线。在此书中，分析研究了四点的交比和四直线的交比，及其在射影和横截情况下的不变性。卡诺希望把几何学从分析符号堆砌的桎梏中解放出来。他拒绝使用解析方法，并开始了纯粹几何的奋斗，他的工作可以说使射影几何学得以复兴。

卡诺在应用数学和筑城学方面也有深入地研究。他的名著《城防守卫》是当时欧洲军队的重要读本。

自卡诺以后，其家庭人才辈出，祖孙三代显赫一时。他自己不但在担任各种军政要职时功绩斐然，1797年他还当选为法国科学院院士。他的一个儿子于1848年担任公共教育部长，另一个儿子是著名的物理学家，一个孙子是第三法兰西共和国第四任总统，另一个孙子是杰出的化学家。

傅里叶 (Fourier, Jean Baptiste Joseph Baron)

(1768—1830)

傅里叶是法国数学家、物理学家。1768年3月21日生于奥塞尔；1830年5月16日卒于巴黎。


傅里叶

傅里叶是一个裁缝的儿子，8岁（另一说9岁）时父母双亡，沦为孤儿，被当地教堂收养。12岁时被送入地方军事学校读书。13岁开始学习数学，便对数学产生了浓厚的兴趣。16岁就独立发现笛卡儿符号法则的一个新证法。但他的志向是当一名军官，在他申请参加炮兵时，当局在其申请书上批道："傅里叶出身低微，不得加入炮兵，虽然他是第二个牛顿。"他只得转谋教士职位，不久在他就读书的学校当了讲师，数学变成了他的终生爱好，后来被聘为巴黎综合工科学校教授。

傅里叶参加了法国大革命，曾和蒙日一道随拿破仑到埃及远征并进行科学考察，克尽职守，深得拿破仑器重。于1798年被任命为下埃及的总督，1809年被封为男爵，1817年被选为法国科学院院士，1822年任该院终身秘书。1827年任法兰西学院终身秘书，同年接替拉普拉斯兼任巴黎综合工科学校校务委员会主席。他还是英国皇家学会会员，彼得堡科学院荣誉院士。

傅里叶是法国分析学派公认的代表，他认为："数学分析与

自然界本身同样的广阔。"1807年他开始热传导的数学研究工作，此项目1812年荣获巴黎科学院的格兰德（Grand）奖。他1822年出版的名著《热的分析理论》，是一本将数学理论应用于物理学的典范。在此书里他把半个世纪前欧拉和贝努利在关于弦振动的研究工作中，曾就一些孤立的、特殊的情况所采用的三角级数方法，作了加工处理，最后发展成为一般理论。他杰出的贡献就在于阐述并例举了相当一类函数（连续的或不连续的）能用形如 $\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$ 的三角级数来表示，但没有给出明确的条件和完整的证明。傅里叶这项工作的重大意义是，它不仅推动了偏微分方程理论的发展，而且改变了数学家们对函数概念的一种传统的有局限的认识，动摇了18世纪以来的这样一个观念：所有的函数不管它们是以何种形式出现的，总都是代数函数的繁衍。傅里叶的观念使代数函数甚至初等超越函数都不再是函数的原型了。由于代数函数的性质不能搬到一切函数上去，所以这种更广意义下的函数及其连续性、可微性、可积性以及其它性质，其真实意义究竟是什么自然也就作为一个新问题被提出来。傅里叶的工作标志着人们能够而且应该从解析函数或可展成泰勒级数的函数的圈子里解拓出来，从而大大地扩充了函数概念的本身。现在数学中用变量的对应方式来定义函数的方法就是狄利克雷（Dirichlet）1837年研究了傅里叶级数理论后提出的。此外，许多数学家还用傅里叶级数构造一些特殊函数，例如，处处连续而处处不可微的函数。由此不难理解，某些函数不仅可以展成为三角级数，而且还可以就其它各种不同的正交函数系（如契比雪夫（Чебышев）多项式、勒让德多项式、埃尔米特（Hermite）多项式、拉盖尔（Laguerre）多项式、雅可比多项式等等）展成为级数，此即广义的傅里叶级数理论。傅里叶级数还对积分概念产生了重要影响，它重申和强调定积分可作为和式的极限来定

义，致使黎曼（Riemann）于1854年在用三角级数表示函数的文章中第一次阐述了目前教科书中通用的积分定义。此外，傅里叶级数对一致收敛性概念、无穷行列式、康托尔的集合论的建立和发展都起到了促进作用。

傅里叶在1811年首先给出了级数收敛及级数和的正确定义，并指出了拉格朗日的一个错误，通项趋近于零并非级数收敛的充要条件，而仅是必要条件。

总之，傅里叶在级数方面的工作，引出了分析学的许多重大问题，从而开辟了分析学的新时代。他的论著简洁而清晰，具有很强的几何直观和实际的物理意义。而在处理问题时，又表现出高超的分析技巧和使用符号的才能。因此，著名物理学家麦克斯韦尔（Maxwell）称傅里叶的论著为“一部伟大的数学诗”；汤姆生（Thomson）认为自己在数学物理上的成就受益于傅里叶的热学著作。

傅里叶还写过一本《方程测定分析》（1831年），其中包括他16岁时对笛卡儿符号法则的改进证法和在此基础上得到的给定范围内n次代数方程实根个数的判别法。他从埃及远征回国后，负责《埃及情况》的出版工作，并在该书绪言中全面评述了埃及从古至法军远征时的历史，因此傅里叶也被人称为埃及学学者。

傅里叶有极好的口才、广泛的兴趣和丰富的想象力。一生忠诚老实、勤奋好学、且见义勇为，曾因保护无辜进过监狱，青年时代就为故乡奥塞尔办过不少好事，深受乡里人们的爱戴。在雅各宾党执政的“恐怖时期”，他曾挺身而出保护了一些无辜受害的科学家，如斯图姆（Sturm）等。当他发现法国科学院埋没了阿贝尔这个天才后，立刻公开表示内疚，并把科学院大奖发给了阿贝尔。

由于傅里叶对热力学有深入的研究，导致了他对“热”的偏执追求。曾有这样一个有趣的传说。据说他在埃及的实验和他的热力学研究使他深信：沙漠地带的热是使身体健康的理想条件。

他因此经常穿着厚厚的衣服住在难以忍受的高温房间中。有人说，由于他对“热”如此地着迷，加剧了他的心脏病，使他在63岁的年龄就逝世了，死前浑身热得象煮过一样。

傅里叶对数学发表了下列言简意赅的见解：“对自然界的深入研究是数学发现的最丰富的源泉。”“数学的主要目标是大众的利益和对自然现象的解释。”

《傅里叶著作集》共2卷，1888—1890年在巴黎出版。他逝世后，他的乡里为他塑了一尊青铜塑像，近年来还以他的名字命名了一所中学。

高斯(Gauss,Garl Friedrich)

(1777—1855)



高　斯

高斯是德国数学家、物理学家、天文学家。1777年4月30日生于不伦瑞克；1855年2月23日卒于格丁根。

高斯的祖父是农民，父亲是园丁兼泥瓦匠。高斯幼年就显露出数学方面的非凡才华：他10岁时，发现了1＋2＋3＋4＋ … ＋97＋98＋99＋100的一个巧妙的求和方法；11岁时，发现了二项式定理。高斯的才华受到了布伦瑞克公爵卡尔·威廉(Karl Wilhelm)的赏识，亲自承担起对他的培养教育，先把他送到布伦瑞克的卡罗林学院学习（1792—1795）。嗣后又推荐他去格丁根大学深造（1795—1798）。

高斯在卡罗林学院认真研读了牛顿、欧拉、拉格朗日的著作。在这时期他发现了素数定理；发现了数据拟合中最为有用的最小二乘法；提出了概率论中的正态分布公式并用高斯曲线形象地予以说明。进入格丁根大学第二年，他发现了正17边形的尺规作图法，这是自欧几里得以来二千年悬而未决的问题，这一成功促使他毅然决定献身数学。高斯22岁获黑尔姆斯泰特大学博士学位，30岁被聘为格丁根大学数学和天文学教授，并担任该校天文台的台长。

高斯的博士论文可以说是数学史上的一块里程碑。他在这篇

文章中第一次严格地证明了“每一个实系数或复系数的任意多项式方程存在实根或复根”，即所谓代数基本定理。从而开创了“存在性”证明的新时代。

高斯在数学世界“处处留芳”：他对数论、复变函数、椭圆函数、超几何级数、统计数学等各个领域都有卓越的贡献。他是第一个成功地运用复数和复平面几何的数学家；他的《算术探究》一书奠定了近代数论的基础；他的《一般曲面论》是近代微分几何的开端；他是第一个领悟到存在非欧几何的数学家；是现代数学分析学的一位大师，1812年发表的论文《无穷极数的一般研究》，引入了高斯级数的概念，对级数的收敛性作了第一次系统的研究，从而开创了关于级数收敛性研究的新时代，这项工作开辟了通往19世纪中叶分析学的严密化道路。在《高等数学》及《工程数学》中以他的名字命名的有：高斯公式、高斯积分、高斯曲率、高斯分布、高斯方程、高斯曲线、高斯平面、高斯记号……等等。

在天文学方面，他研究了月球的运转规律，创立了一种可以计算星球椭圆轨道的方法，能准确地预测出行星在运行中所处的位置，他利用自己创造的最小二乘法算出了谷神星的轨道和发现了智神星的位置。阐述了星球的摄动理论和处理摄动的方法，这种方法导致海王星的发现。他的《天体运动理论》是一本不朽的经典名著。

在物理学方面，他发明了“日光反射器”。与韦伯一道建立了电磁学中的高斯单位制，最早设计与制造了电磁电报机，发表了《地磁概论》，绘出了世界第一张地球磁场图，定出了磁南极和磁北极的位置。

高斯对天文学和物理学的研究，开辟了数学与天文学、物理学相结合的光辉时代。高斯认为：数学，要学有灵感，必须接触现实世界。他有一句名言：“数学是科学之王，数论是数学之王，它常常屈尊去为天文学和其它自然科学效劳，但在所有的关

系中，它都堪称第一。”

高斯厚积薄发，治学严谨，一生发表了150多篇论文，但仍有大量发现没有公诸于世。为了使自己的论著无懈可击，他的著作写得简单扼要、严密，不讲来龙去脉，有些地方文字几经琢磨推敲，以致使人读了十分费解，他论著中所深藏不露的内容几乎比他所发表的明确结论还要多得多。阿贝尔对此曾说：“他像只狐狸，用尾巴抹平了自己在沙地上走过的脚印。”对于这些批评，高斯回答说：“凡有自尊心的建筑师，在瑰丽的大厦建成之后，决不会把脚手架留在那里。”不过他的著作过于精炼、难于阅读也妨碍了他的思想更广泛的传播。由于高斯过于谨慎，怕引起“庸人的叫喊”，长期不敢将自己关于非欧几何的观点公诸于世。另外他在对待波尔约（Bolyai）的非欧几何和阿贝尔的椭圆函数所采取的冷漠态度，也是数学史上遗憾的事件。

高斯一生勤奋，很少外游，以巨大的精力从事数学及其应用方面的研究。他精通多种文字和语言，拥有六千多卷各种文字（包括希腊、拉丁、英、法、俄、丹、德）的藏书。他在从事数学或科学工作之余，还广泛阅读当代欧洲文学和古代文学作品。他对世界政治很关心，每天最少花一小时在博物馆看各种报纸。对学习外语也很有兴趣，62岁时，他在没有任何人帮助的情况下自学俄文，两年之后便能顺利地阅读俄文版的散文诗歌及小说。

高斯是近代数学的伟大奠基者之一，他在历史上的影响之大可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列。高斯被誉为：“能从九霄云外的高度按某种观点掌握星空和深奥数学的天才。”在慕尼黑博物馆高斯的画像下有这样一首诗：

“他的思想深入数学、空间、大自然的奥密。他测量了星星的路径、地球的形状和自然力。他推动了数学的进展直到下个世纪。”

高斯一生勤于思考，他曾说：“假如别人和我一样深刻和持续地思考数学真理，他会作出同样的发现。”

泊松(Poisson,Simeon-Denis)

(1781—1840)



泊 松

泊松是法国数学家、物理学家和力学家。1781年6月 21 日生于皮蒂维耶；1840年 4 月25日卒于巴黎附近的索镇。

泊松的父亲是退役军人，退役后在村里作小职员，法国革命爆发时任村长。泊松最初奉父命学医，但他对医学并无兴趣，不久便转向数学。于1798年进入巴黎综合工科学校，成为拉格朗日、拉普拉斯的得意门生。在毕业时由于其学业优异，又得到拉普拉斯的大力推荐，故留校任教。1806年接替傅里叶任该校教授，1809年任巴黎理学院教授，1812年当选为法国科学院院士，1816年应聘为索邦大学教授，1826年被选为彼得堡科学院士。

泊松是法国第一流的分析学家。年仅18岁就发表了一篇关于有限差分的论文，受到了勒让德的好评。他一生成果累累，发表论文300多篇，对数学和物理学都作出了杰出贡献。

在数学方面：泊松是第一个沿着复平面上的路径施行积分的人。在他1817年的出版物中对序列收敛的条件就有了正确的概念，现在一般把这个条件归功于柯西。泊松对发散级数作了深入的探讨，并奠定了“发散级数求和”的理论基础，引进了一种在今天看来就是可和性的概念。把任意函数表为三角级数和球函数

时，他广泛地使用了发散级数，用发散级数解出过微分方程，并导出了用发散级数作计算怎样会导致错误的例子。他还把许多含有参数的积分化为含参数的幂级数。他关于定积分的一系列论文以及在傅里叶级数方面取得的成果，为后来的狄利克雷和黎曼的研究铺平了道路。

泊松也是19世纪概率统计领域里的卓越人物。他改进了概率论的运用方法，特别是用于统计方面的方法，建立了描述随机现象的一种概率分布——泊松分布。他推广了“大数定律”，并导出了在概率论与数理方程中有重要应用的泊松积分 $\int_0^{+\infty} e^{a^2x^2}dx$

1837年出版了他的专著《判断概率的研究》。

泊松就三个变数的二次型建立起特征值理论；并给出新颖的消元法；研究过曲面的曲率问题和积分方程。

在数学物理方面：泊松解决了许多热传导方面的问题，他使用了按三角级数、勒让德多项式、拉普拉斯曲面调和函数的展开式，关于热传导的许多成果都包含在其专著《热的数学理论》之中。他解决了许多静电学和静磁学的问题，奠定了偏向理论的基础；研究了膛外弹道学和水力学的问题；提出了弹性理论方程的一般积分法，引入了泊松常数。他还用变分法解决过弹性理论的问题。

在引力学中，他发表了《关于球体引力》和《关于引力理论方程》的论文，引入了著名的泊松方程。他的名著《力学教程》（2卷），发展了拉格朗日和拉普拉斯的思想，成为广泛使用的标准教科书，在天体力学方面，他研究了关于月球和行星理论以及太阳系稳定性的某些问题，计算出由球体和椭球体引起的万有引力。他1831年还发表了《毛细管作用新论》。

泊松一生对摆的研究极感兴趣，他的科学生涯就是从研究微分方程及其在摆的运动和声学理论中的应用开始的。直到晚年，他仍用大部分时间和精力从事摆的研究。他为什么对摆如此着

迷？有一个传说，泊松小时候是由一个保姆照管的，保姆一离开他时，就把泊松放在一个摇篮式的布袋里，并将布袋挂在棚顶的钉子上，吊着他摆来摆去。这个保姆认为，这样不但可以使孩子身上不被弄脏，而且还有益于孩子的健康。泊松后来风趣的说：吊着他摆来摆去不但是他孩提时的体育锻炼，并且使他在孩提时就熟悉了摆。

波尔察诺(Bolzano, Bernhard)

（1781—1848）

波尔察诺是捷克的数学家、哲学家、逻辑学家。1781年10月5日生于布拉格；1848年12月18日卒于布拉格。


波尔察诺

波尔察诺的父亲是北意大利人。波尔察诺1796年入布拉格大学哲学院攻读哲学、数学和物理学，1800年转入神学院。1805年任布拉格大学宗教哲学教授，1818年任该校哲学院院长，1815年被选为波希米亚皇家学会会员。

波尔察诺对数学的最大贡献是将严格的论证引入分析之中，是建立严格数学基础的先驱者之一。他给出了连续函数的严格定义，在历史上他第一个明确地指出：连续的概念的基础存在于极限概念之中。他在1817年的一本题目为《下述定理的纯分析证明——在使得函数取相反（符号）值的每两个变量之间，至少存在函数的一个零点》的一本小册子中，他试图给出关于连续函数的中值定理的“纯分析的证明”。他认为直观的几何证明——连续曲线必定在某处穿过将其两端隔开的任何直线——是基于还没有严格定义的连续概念。他说，为了准确地阐明连续性概念，我们必须这样来理解：“对于某一范围内（或外）的x值，函数$f(x)$作连续性的变化，只不过是说：如果x是任一这样的值，则可通过把ω的绝对值取得足够小，而使

得差$f(x+\omega)-f(x)$的绝对值小于给定的量。”这个定义和稍后柯西所给出的连续性定义没有本质差别。目前微积分中关于函数连续性的概念仍然是这样定义的。

波尔察诺也是第一个把$f(x)$的导数定义为当Δx（经由负值和正值）趋于0时，比值$[f(x+\Delta x)-f(x)]/\Delta x$无限接近的值记为$f'(x)$。他强调$f'(x)$不是两个0的商，也不是两个消失了的量的比，而是前面指出的比值所趋近的一个数。他正确地指出函数在该点是连续的。他还首先引入了左导数与右导数的概念。

自微积分创立以来，总把导数和运动速度联系在一起，使得人们曾一度地认为函数的连续性足以保证导数的存在。但是在1834年，波尔察诺在他的《函数论》（他虽在1843年写就了这本书，但生前并没有发表，直到1930年才在布拉格出版）中，他给出了一个在每点都不存在有限导数的连续函数的例子。这个例子如下：设PQ是与水平线斜交的直线段，中点为M。将PM与MQ各分为4等分，记分点为P_1，P_2，P_3与Q_1，Q_2，Q_3令$\bar{P}_3$为P_3在过点M的水平线的反射，$\bar{Q}_3$为Q_3在过点Q的水平线的反射，这样就形成折线$P\bar{P}_3M\bar{Q}_3Q$，再对这个折线的4个线段中的每一个，应用上述的基本作法，这样就得到一条由4^2个线段组成的折线。依此无穷地继续下去，这种折线图形将以一条曲线为其极限，它便是一个处处不可微分的连续函数。波尔察诺的这个例子，恰似科学研究中的一个漂亮实验，雄辩地说明了，仅凭几何或物理上的直观，往往会铸成重大的错误。从而证明了连续函数未必可导。但是波尔察诺这项工作在当时却鲜为人知。三分之一的世纪过后，才由魏尔斯特拉斯（Weierstrass）用另外一个著名的例子说明了它。

波尔察诺还指出，对于无穷级数必须考虑收敛性问题，（并且特别批评了二项式定理的不严密证明），他正确地阐述了序列收敛的条件。这从波尔察诺下面叙述中可以看得很清楚：对于序列$F_1(x)$，$F_2(x)$，$F_3(x)$，…，$F_n(x)$，…，$F_{n+r}(x)$，…，如果

$F_n(x)$与$F_{n+r}(x)$的差的绝对值，当n无限增大时，总是小于任意给定的正数，则存在一个而且只有一个值，使这个数列和它任意接近。他的这个基本命题，对于定义实数和建立连续统的概念也是有重大意义的。他还建立了有界实数集的最小上界的存在定理，后来魏尔斯特拉斯应用波尔察诺的方法证明了现在冠以波尔察诺-魏尔斯特拉斯名字命名的定理，这个定理证明了任何有界无穷点集至少存在一个点，它的任何领域都含有这个无穷点集的无穷多点。

波尔察诺是第一个打破有限集合观念的框架，敢于对无限集合进行逆向思维的杰出数学家。他关于无穷的探究是康托尔集合论前导工作，从他死后3年出版的《无穷悖论》一书中，可以看出他为建立集合的明确理论迈出了积极而重要的一步。他坚持实无穷集合的存在，并强调了集合的等价概念，注意到无穷集合的真子集可以同整个集合等价。他也是现代逻辑学的先驱，他认为任何数学都应建立在严格的逻辑结构基础之上。

虽然波尔察诺的观点已指出了微积分最终应遵循的方向，的确19世纪的数学思想也是按照这一方向前进的，但他的工作当时却并不为人们所注意，直到半个多世纪以后才被汉克尔(Hankel)所重视。然而幸运地，几乎与他同时的法国数学家柯西也研究了类似的观点，并且成功地奠定了微积分的基础。

波尔察诺一生屡遭挫折，不但辛勤研究的成果遭到埋没，而且还因传播自由主义于1819年被解除职务并受到政治监督。1824年又因反对军国主义和战争、主张改革社会经济和国民教育而被辞退。

柯西(Cauchy, Augustin-Louis)

(1789——1857)


柯　西

柯西是法国数学家，1789年8月21日生于巴黎；1857年5月23日卒于巴黎附近的索镇。

柯西的父亲是一位精通古典文学的律师，曾任法国参议院秘书长，和拉格朗日、拉普拉斯等人交往甚密，因此柯西从小就认识了一些著名的科学家，柯西自幼聪敏好学，拉格朗日曾预言他日后必成大器。他1805年入巴黎综合工科学校，1807年转入道路桥梁工程学校。大约在1809年当上了一名工程师。由于身体欠佳，又颇具数学天赋，便听从拉格朗日与拉普拉斯的劝告转攻数学，并于1813年回到巴黎综合工科学校任教，1816年晋升为该校教授。

柯西创造力惊人，数学论文象连绵不断的泉水在柯西的一生中喷涌，他发表了800多篇论文，出版专著7本，全集共有27卷。从他23岁写出第一篇论文到68岁逝世的45年中，平均每月发表两篇论文。1849年，仅在法国科学院8月至12月的9次会上，他就提交了24篇短文和15篇研究报告。他的文章朴实无华、充满新意。柯西27岁即当选为法国科学院院士，还是英国皇家学会会员和几乎所有外国科学院院士。

柯西对数学的最大贡献是在微积分中引进了清晰和严格的表述与证明方法。在这方面他写下了三部专著：《分析教程》

(1821年)、《无穷小计算教程》(1823年)、《微分计算教程》(1826—1828年)。他的这些著作，摆脱了微积分单纯的对几何、运动的直观理解和物理解释，引入了严格的分析上的叙述和论证，从而形成了微积分的现代体系。在数学分析中，可以说柯西比任何人的贡献都大，微积分的现代概念就是柯西建立起来的。有鉴于此，人们通常将柯西看作是近代微积分学的奠基者。阿贝尔称颂柯西"是当今懂得应该怎样对待数学的人。"并指出："每一个在数学研究中喜欢严密性的人都应该读这本杰出的著作(《分析教程》)。"柯西将微积分严格化的方法虽然也利用无穷小的概念，但他改变了以前数学家所说的无穷小是固定数。而把无穷小或无穷小量简单地定义为一个以零为极限的变量。他定义了上下极限。最早证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的收敛，并在这里第一次使用了极限符号。他指出了对一切函数都任意地使用那些只有代数函数才有的性质，无条件地使用级数，都是不合法的。判定收敛性是必要的，并且给出了检验收敛性的重要判据——柯西准则。这个判据至今仍在使用。他还清楚的论述了半收敛级数的意义和用途。他定义了二重级数的收敛性，对幂级数的收敛半径有清晰的估计。柯西清楚的知道无穷级数是表达函数的一种有效方法，并是最早对泰勒定理给出完善证明和确定其余项形式的数学家。他以正确的方法建立了极限和连续性的理论。重新给出函数的积分是和式的极限，他还定义了广义积分。他抛弃了欧拉坚持的函数的显示式表示以及拉格朗日的形式幂级数，而引进了不一定具有解析表达式的函数新概念。并且以精确的极限概念定义了函数的连续性、无穷级数的收敛性、函数的导数、微分和积分，以及有关理论。柯西对微积分的论述，使数学界大为震惊。例如，在一次科学会议上，柯西提出了级数收敛性的理论。著名数学家拉普拉斯听过后非常紧张，便急忙赶回家，闭门不出，直到对他的《天体力学》中所用

到的每一级数都核实过是收敛的以后，才松了一口气。柯西上述三部教程的广泛流传和他一系列的学术讲演，他对微积分的见解被普遍接受，一直沿用至今。当然，在柯西的时代，实数的严格理论还未建立起来，对连续性、一致连续性、可微性、可积性以及它们之间的关系也不可能彻底地阐述清楚，所以在他的论著中也存在一些错误。例如，他曾断言如果$Un(x)$连续且$\sum_{n=0}^{\infty}Un(x)$收敛于$F(x)$，则$F(x)$也连续，且可以逐项积分$\int_a^b F(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b Un(x)dx$

他甚至还断言，对于连续函数$f(x,u)$有$\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}dx$

并且断言二元函数若对每个变量连续则它必是连续的等等。他的这些错误，相继被后来的数学家澄清。现今所谓极限的柯西定义或"ε—δ"定义乃是经过魏尔斯特拉斯的加工。

柯西的另一个重要贡献，是发展了复变函数的理论，取得了一系列重大成果。例如，他给出了复变函数的几何概念，证明了在复数范围内幂级数具有收敛圆，给出了含有复积分限的积分概念以及残数理论等。

柯西还是探讨微分方程解的存在性问题的第一个数学家，他证明了微分方程在不包含奇点的区域内存在着满足给定条件的解，从而使微分方程的理论深化了。在研究微分方程的解法时，他成功地提出了特征带方法并发展了强函数方法。

柯西在代数学、几何学、数论等各个数学领域也都有创建。例如，他对置换理论作了系统的研究，并由此产生了有限群的表示理论。他还深入研究了行列式的理论，并得到了有名的宾内特(Binet)–柯西公式。他总结了多面体的理论，证明了费尔马关于多角数的定理等等。

柯西对物理学、力学和天文学都作过深入的研究。特别在固体力学方面，奠定了弹性理论的基础，在这门学科中以他的名字命名的定理和定律就有16个之多，仅凭这项成就，就足以使他跻身于杰出的科学家之列。

柯西一生对科学事业作出了卓越的贡献，但也出现过失误，特别是他作为科学院的院士、数学权威在对待两位当时尚未成名的数学新秀阿贝尔、伽罗华（Galois）都未给予应有的热情与关注，对阿贝尔关于椭圆函数论一篇开创性论文，对伽罗华关于群论一篇开创性论文，不仅未及时作出评论，而且还将他们送审的论文遗失了。这两件事常受到后世评论者的批评。

柯西在政治上属于保皇派，终身守节，非常执拗，1830年法王查理十世（Charles X）被逐，路易·腓力普(Louis Phillippe)称帝。柯西由于拒绝宣誓效忠新皇帝，被革去职务，并出走意大利都灵，后移居布拉格。1848年，路易·腓力普君主政体被推翻，成立法兰西第二共和国，宣誓的规定废除，柯西才回到巴黎高等工艺学院任教授。1852年政变，共和国又变帝国，恢复了宣誓仪式，但拿破仑三世（Napoleon Ⅲ）特地豁免柯西和物理学家阿拉哥(Arago)两人可以免除效忠宣誓，对于皇帝的屈尊迁就，柯西的回报是将他的薪金捐赠给它曾住过地方的穷人。

柯西有一句名言：“人总是要死的，但他们的业绩应该永存。”

格林(Green, George)

(1793—1841)

格林是英国数学家、物理学家。1793年7月14日生于诺丁汉；1841年5月31日卒于剑桥。

格林出生在一个磨坊主家庭，童年辍学在父亲的磨坊干活，他一边干活一边利用工余时间坚持自修数学和物理，特别是在读了拉普拉斯的《天体力学》后很受启发，于是自己试图完全用数学方法来论述静电磁学。在32岁那年出版了一本他私人印的小册子《数学分析在电磁学中的应用》，这是在电磁学的数学理论方面的最初尝试。在这本书中，他引入了位势概念，包含了他首先发现的展布在一个平面区域上的二重积分与沿这个区域边界的曲线积分之间的关系（即数学分析中有名的格林公式）。但由于这份小册子印数不多，传播范围不广，未引起人们的注意。十几年后威廉·汤姆生（William Thomson）发现了这本小册子，并认识到它的巨大价值，于1845年将它发表在《数学杂志》上，但这时格林已去世4年。

格林的父亲去世后，一些好友鼓励他到大学去深造，他经过4年的自学，将其初等教育中的空白填补后，在1833年——当时他已经40岁，才以自费生的身份进入剑桥大学科尼斯学院学习，4年后毕业获学士学位，毕业时数学成绩名列第四。1839年被聘为剑桥大学教授，并被选为剑桥冈维尔-科尼斯学院评议员。

格林发展了电磁理论，他引入的位势等概念，其意义远远超出了解位势方程，他首次研究了与求解数学物理边值问题密切相关的特殊函数——格林函数。格林函数现已成为偏微分方程理论中的一个重要概念和一项基本工具。格林还发展了能量守恒定

律，将其运用于变形弹性体，得出了弹性理论的基本方程。格林在光学与声学领域也很有成绩，其中关于光在晶体中的反射和折射的研究具有特别重要的意义。他还发表了关于流体平衡定律，关于n维空间中的引力及关于流体受椭球体振动而引起的运动等论文。他在1828年的论著里，毫不犹豫地考虑了n维位势问题，关于这个理论，他说："已经不再象过去那样局限于三维空间了"。他率先发展n维分析。在研究波管道中的传播问题时，讨论过用发散级数来解微分方程的方法。

格林在学术研究中反对门阀偏见。在分析引入英国后，他是第一个沿着大陆上的研究线索前进的英国数学家。他的工作培育了数学物理学方面的剑桥学派，其中包括了近代很多伟大的数学物理学家，如汤姆生、斯托克斯（Stokes）、雷利（Rayleigh）、麦克斯韦尔等。

格林留下的著作于1871年汇集出版。为数虽然不多，但在现代数学物理方面具有举足轻重的地位，以他的名字命名的格林函数、格林公式、格林定律、格林曲线、格林测度、格林算子、格林方法等，都是数学物理中经典的内容。特别是格林那种自强不息的精神、自学成材的范例，堪为楷模。

奥斯特罗格拉茨基

(Ostrogradsky, Michel)

(1801—1862)


奥斯特罗格拉茨基

奥斯特罗格拉茨基是俄国数学家、力学家。1801年9月24日生于帕先纳亚；1862年1月1日卒于波尔塔瓦。

奥斯特罗格拉茨基出生在一个地主家庭。他从小就表现出强烈的求知精神。中学毕业后曾立志献身于军事，并到一个近卫军团部学习军事。但他的伯父却极力建议他进大学深造。于是奥斯特罗格拉茨基15岁那年进入了哈尔科夫大学数学物理系。大学期间学习勤奋、成绩优异。由于他持反宗教的观点，不信仰“神学和督基教教义”而触犯了某些唯心主义教授和有关当局，从而未能获得该大学的毕业证书和学位。为了继续深造，1822年到了巴黎，结识了拉普拉斯、傅里叶、安培(Ampere)、泊松、柯西等人，并在巴黎索邦和法兰西学院听数学物理学科的讲座。不久便在数学、力学中取得了一系列的研究成果，并赢得了著名科学家的声誉。1828年回到俄国，在彼得堡各大学和军事院校任教。1830年被选为彼得堡科学院院士。他还是美国科学院、都灵科学院、罗马科学院的院士及巴黎科学院的通讯院士。

奥斯特罗格拉茨基是19世纪俄国最伟大的数学家之一，是俄

国在数学物理方面的奠基人。

在数学方面：1828年他给出了体积积分与面积积分的相互关系的公式，即奥斯特罗格拉茨基-高斯公式，1834年他又把这个公式推广到n重积分的情形；他研究了有理函数的积分能否表示成代数函数和对数函数的问题，并由此得出有理分式积分的分解公式；其中一部分表示成代数函数，而另一部分是分母中带有单根的分式的积分，这个公式叫做奥斯特罗格拉茨基-埃尔米特公式；他给出了二重积分和三重积分的变换公式；解决了求多重积分极值的问题；他利用任意参数的变分方法揭示了线性微分方程积分的某些性质；给出了非保守系统的一般变分原理的某些结果，并推广到变分学的一般等周问题；他在研究傅里叶提出的固体中热分布的微分方程以后，解决了物体温度的测定方法，并将傅里叶热传导方程的方法应用于多面体；还给出求气体声振方程、弹性薄片方程的积分等；他对数论、概率论、高等代数和几何学等也都作过深入的研究。

在力学方面：他对球形弹头的飞行进行了大量的理论研究和实验，给出了偏心弹头在空中运动的微分方程；对于虚位移原理和最小作用原理的一般形式，应该说是他和哈密顿分别独立完成的；他讨论了力学系统的微分方程的积分法；还研究了关于冲击的一般理论。

奥斯特罗格拉茨基还是一位卓越的教育家。他不但是造诣很深的学者，而且对教材与教学法的研究极为重视。为此他撰写了一系列教科书，其中最主要的有《初等几何教程》、《三角学概要》、《代数和超越分析讲义》、《天体力学教程》等。他的科学思想和教育思想孕育了俄国几代的学者，被奉为苏联数学界一代宗师。但是，他作为当时俄国的数学权威，在评论罗巴切夫斯基（Lobatchevsky）的论著《几何学原理》时说："作者旨在写出一部使人不能理解的著作……不值得科学院注意"。却是一件很大的失误。

阿贝尔 (Abel, Niels Henrik)

(1802—1829)

阿贝尔是挪威数学家。1802年8月5日生于芬岛（另一说克里斯蒂安桑）；1829年4月6日卒于弗鲁兰。



阿贝尔

阿贝尔的父亲是村子里的基督教牧师，家庭贫困。阿贝尔中学时代，得到一位很有才华的数学教师霍尔姆博（Holmböe）的教诲，引导他走上了数学研究的道路。从16岁开始、就自学了牛顿、欧拉、拉格朗日、勒让德等人的数学著作，被同学称为“数学迷”。阿贝尔18岁时，父亲便去世了，本来就贫苦的家庭又失去了唯一的经济支持，全靠着几位教授和邻居的资助维持生计。在19岁那年，阿贝尔进入了奥斯陆大学学习。

阿贝尔有惊人的早慧。当他还是一个中学生的时候，就按照高斯对二项式方程的处理方法探讨高次方程的可解性问题。起初，他认为自己用根式已经解决了一般的五次方程，但很快就发现了自己的错误。进大学后他继续研究这一问题，终于在1824年证明了一般五次方程是不能像低次方程那样用根式求解的，从而解决了使数学家困惑300年之久的一个难题，这时他年仅22岁。他自己出资印发了这个证明。另外，在1823年还发表了其它一些论文，其中包括用积分方程解古典的等时线问题，可以说它是这

类方程的第一个解法，为积分方程在19世纪末20世纪初的全面发展开辟了道路。

阿贝尔深刻的数学思想超出了挪威数学界所能理解的水平，因此他渴望出访德、法等国。在朋友和教授们的支持下，经过和政府的多次交涉，才获取了一笔不大的出国奖学金。

在柏林期间，他接受了高斯，柯西学派注重严格推导的学风，对分析中逻辑混乱、概念不清以及证明中的有失严格深为不满。他曾尖锐地指出："人们在分析中确实发现了惊人的含糊不清之处。这样一个完全没有计划和体系的分析，竟有那么多人研究过它，真是奇怪。最坏的是，从来没有严格地对待过分析。"他给出了二项式定理对于所有复指数都是正确的证明，从而奠定了幂级数收敛的一般理论，也是第一次给出这种级数展开式成立的可靠证明。从而解决了在实数和复数范围内分别求幂级数的收敛区间和收敛半径的问题。他还纠正了柯西关于连续函数的一个收敛级数的和一定连续的错误，并给出了例子：$\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots$，虽然此级数的每一项都是连续的，但是，当$x=(2n+1)\pi$而$n$是整数时，此级数的和是不连续的。他还利用一致收敛的思想，正确地证明了"连续函数为项的一个一致收敛级数的和，在收敛域内是连续的"，可惜他当时未能从中把一致敛的性质抽象概括出来，形成普遍的概念。阿贝尔这些工作率先垂范的推进了分析学的严格化。

阿贝尔在柏林结识了一位热情的业余数学爱好者克莱尔（Crelle）。克莱尔对阿贝尔的才华十分敬佩。阿贝尔则鼓励克莱尔创办《纯粹与应用数学学报》，这是世界上专载数学研究的第一个学术刊物。该刊物前3期便登载了阿贝尔22篇文章，他的《五次方程代数解法不可能存在的证明》就发表在创刊号上。阿贝尔把他关于五次方程的小册子寄给格丁根大学的高斯，想借此作为晋谒高斯的通行证。但不知什么原因高斯根本未看（因为在

高斯死后30年，人们发现其遗稿中的这本小册子还没有启封），阿贝尔觉得受到冷遇，决心不再见高斯而径自去巴黎。

在巴黎他会见了柯西、勒让德、狄利克雷等人，但这些会面也是虚与敷衍，因为《纯粹与应用数学学报》这个新刊物当时在法国几乎无人知道，而阿贝尔又太腼腆，不好意思在陌生人面前谈论自己的著作，因此人们并没有真正认识到他的天才。在巴黎期间他完成了巨著《论一类广泛的超越函数的一般性质》。在这部著作中研究了$\int R(x,y)dx$ 类型的积分，其中$R(x,y)$是x,y的任意有理函数，而y表示x的代数函数。这时，特别要区别下列两种情况：若y表示三次和四次多项式的平方根，则积分为椭圆积分；若y高于四次多项式的平方根，则积分称为超椭圆积分。形如$\int R(x,y)dx$的积分，在数学中称为阿贝尔积分。阿贝尔当时把书稿呈给法国科学院，希望这能引起法国数学家们对他的注意，但不幸稿件被柯西、勒让德等人在审阅时丢失了。他空等了一段时间，终因旅资用尽而不得不返回柏林。

在柏林他完成了关于椭圆函数的一篇开创性论文后就回到了挪威。他原希望回国后能被聘为大学教授，但希望又一次落空。只能靠给私人补课谋生，或当代课教师，生活极其困苦，用他自己的话来说“穷得就象教堂里的老鼠”。在这样艰苦的条件下，他仍坚持搞科研工作，主要研究椭圆函数论，并开创这一数学分支。后来阿贝尔的声誉随着他的研究成果逐渐传到欧洲的所有数学中心，但他却身处消息闭塞之地，毫无所知。更不幸的是1829年染上肺病，不久在贫病交加中去世，终年不足27岁。死后的第三天柏林大学给他的数学教授聘书才寄到挪威，这也是长使后世数学家无不为之扼腕叹息的事情。

阿贝尔短促的一生，却在数学史上留下了光辉的篇章。数学中以他的名字命名的有：阿贝尔群、阿贝尔变换、阿贝尔求和法、阿贝尔函数、阿贝尔范畴、阿贝尔扩张、阿贝尔定理、阿贝尔遍历定理、阿贝尔连续性定理、阿贝尔方程、阿贝尔积分方

程、阿贝尔微分、阿贝尔积分、阿贝尔射影算子、阿贝尔问题、……。著名数学埃尔米特曾说："阿贝尔留下来的问题，足够数学家忙150年。"克莱尔在他主编的《纯粹与应用数学学报》里写道："阿贝尔在他的所有著作里都打下了天才的烙印，表现出了不起的思维能力。我们可以说他能够穿透一切障碍深入问题的根底，具有似乎是无坚不摧的气势……。他又以品格纯朴高尚以及罕见的谦逊精神出众，使他的人品也像他的天才那样受到不同寻常的爱戴。"

阿贝尔有一句名言："一个人如果要在数学上有所进步，他必须向大师们学习。"

雅可比（Jacobi，Carl Gustav Jacob）

（1804—1851）

雅可比是德国数学家。1804年12月10日生于波茨坦，1851年2月18日卒于柏林。



雅可比

雅可比出生在一个犹太籍银行家庭，自幼受到良好的教养。他天资聪敏且勤奋好学，年仅12岁时就准备上大学，但年龄太小不符合大学规定的入学年龄，因此只好先入大学预科，16岁正式进入柏林大学。在大学期间，他自学了拉普拉斯、欧拉、拉格朗日等名家的论著。年仅21岁时，就以代数分式分解成最简式的论文，而获得博士学位。1826年到科尼斯堡大学任教，1827年晋升为副教授，1832年晋升为教授。23岁被选为柏林科学院院士，28岁当选为英国皇家学会会员，他还是彼得堡科学院、维也纳科学院、马德里科学院、法国科学院的名誉院士或通讯院士。1844年起在柏林大学任教。

雅可比是椭圆函数论的开拓者之一。他对这一课题的研究成为此后函数论发展所遵循的模式。他在四个θ函数的基础上，建立了椭圆函数的理论。θ函数的商产生三个雅可比函数snz、cnz、dnz。他1829年的《椭圆函数基本新理论》成为椭圆函数的一部经典著作。并将椭圆函数用于研究数论、陀螺运动、椭球面上的大地测量线等，都取得了成效。他1832年证明了：正如椭圆函数

可以由反演椭圆积分求得一样，也可以由反演超椭圆积分求得超椭圆函数。这一成就使得他建立起p个变量（p≥2）的阿贝尔函数论。

雅可比是继柯西之后，在行列式理论方面有最多成果的数学家。他的《关于行列式的结构和性质》（1841年）对行列式做了奠基性的贡献。“行列式”（determinant）这个词最终是由他认可的。他自己也最先使用函数行列式这一概念，因而后世称之为雅可比行列式，它在隐函数定理和反函数定理以及广义泰勒展开等许多分析研究中都有重要作用。当行列式的元素是t的函数时，它的导数公式也首先是由雅可比在1841年给出的。他还给出了函数行列式的乘积定理，并提出了这些行列式在多重积分中的变量置换及解偏微分方程中的作用。雅可比对变分学也有重要贡献，他在这方面的成果除了对判定函数极值的存在性有特殊意义外，还使人们清楚地看出变分学进一步的发展应突破通常微积分极大、极小理论的框架。另外他对发散级数理论也有创见。

雅可比对一阶偏微分方程有深入的研究，并应用到对动力系统的分析。他的《动力学讲义》把微分方程和动力学联系了起来。哈密顿-雅可比偏微分方程对量子力学的产生起了推动作用。

雅可比在数论、空间曲线、曲面理论、常微分方程等领域内都有重大贡献。除已提到的雅可比行列式之外，在数学中还有许多定理、公式、函数、恒等式、方程式、积分、曲线、矩阵、根式、符号都是与雅可比的名字联系在一起。

雅可比还是一位卓越的数学家教育家。他一生培养了大批的数学人才，鼓励他们独立研究问题。他创造了“讨论班”这种生动活泼的教学形式。通过讨论班，他把自己最新的研究和发现介绍给学生，启发学生主动、自觉的学习，引导学生尽早进入有关课题的前沿。有的学生片面认为在进行研究之前，对已有的成就都要掌握。为了消除这种想法，鼓励学生尽早进行研究，雅可比

作了一个风趣的比喻："如果你认为，在和一个女子结婚之前，先要认识世界上所有未婚女子，那么你的父亲就一辈子不会结婚，你也就生不出来。"他的比喻使学生们深受启发，雅可比创造的"讨论班"这种教学方式很快在德国普及起来，对推动德国数学的发展、造就数学人才都起到了积极的作用。雅可比在柯尼斯堡任教时，形成了以他为首的学派。雅可比认为："科学的真正目的是发扬人类精神的光荣。"

1848年，即革命高潮到来那年，由于他在一次即席演讲中得罪了王室，被怀疑为自由党人，耽心受到迫害，便打算去维也纳大学。但在他即将去维也纳时，普鲁士的腓特烈·威廉四世（Frederick William Ⅳ）认识到他的离去对普鲁士造成的损失太大，便说服他留了下来。

雅可比生性耿直，有时不免会引起人们的反感。晚年由于健康（患糖尿病）、经济以及政治上的某些原因，隐居柏林。1851年染天花不幸逝世。他去世后，普鲁士科学院陆继出版由魏尔斯特拉斯等人编纂的雅可比著作集和增补集共7卷。

狄利克雷（Dirichlet，Peter Gustav Lejeune）

（1805—1859）

狄利克雷是德国数学家。1805年2月13日生于迪伦；1859年5月5日卒于格丁根。



狄利克雷

狄利克雷出生在一具有法兰西血统的家庭。先在迪伦学习，后到格丁根受业于高斯。1822年到1827年间旅居巴黎当家庭教师。在此期间，他参加了以傅里叶为首的青年数学家小组的活动，深受傅里叶学术思想的影响。1827年在波兰布雷斯劳大学任讲师。从1839年起任柏林大学教授。1855年，高斯逝世后，他作为高斯的继任者被格丁根大学聘任为教授，直至逝世。他1831年被选为普鲁士科学院院士，1855年被选为英国皇家学会会员。

狄利克雷在数学和力学两个领域都作出了名垂史册的重大贡献。尤以分析、数论、位势论为最。

在分析方面，他最卓越的工作是对傅里叶级数收敛性的研究。1829年在其论文《关于三角级数的收敛性》中，第一次对傅里叶级数的收敛性给出了严谨的证明，得到了函数$f(x)$的傅里叶级数收敛的第一个充分条件："对于在$[-\pi,\pi]$内有定义且有限的、逐段连续且逐段单调的函数$f(x)$，其傅里叶级数在$(-\pi,\pi)$内收敛于$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$，在端点$x=\pm\pi$处收敛于

$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$。这一研究还促使他将函数作了一般化的推广。他给出了现今仍在使用的（单值）函数的定义：如果对于给定区间上的每一个x的值，有唯一的y值同它对应，则y就是x的一个函数。他还强调指出，在整个区间上y是否按照一种或多种规律依赖于x或者y依赖于x的方式能否用数学运算式来表达，都是无关紧要的。在1829年，他给出了如下具有典型意义的例子：

$$y=\begin{cases} c, & \text{当}x\text{为有理数} \\ d, & \text{当}x\text{为无理数。} \end{cases}$$

这种与传统上迥然不同的函数表示，正是数学从研究函数的“计算”转变到研究函数的“概念、性质、结构”的开始，他还讨论了当μ无限增加时积分$\int_0^a f(x)\frac{\sin\mu x}{\sin x}dx$，$(a>0)$与$\int_a^b f(x)\frac{\sin\mu x}{\sin x}dx$，$(b>a>0)$的极值，这些积分至今仍以狄利克雷的名字命名。1837年他证明了：对于一个绝对收敛的级数，可以把它的项加以组合或重新排列，而不改变原级数的和。并且举例说明一个条件收敛的级数其项经过一定的重新排列，而使级数的收敛和发生改变。他曾明确指出，由连续函数构成的函数项级数，其和函数未必是连续函数。

狄利克雷是解析数论的创始人之一。1837年，他在证明每个算术序列$\{a+nb\}$（式中a与b互素）包含无穷多个素数时，创立了狄利克雷级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-z}$，式中$a_n$、z是复数。他还证明了在序列$\{a+nb\}$中的素数的倒数之和是发散的。1838年到1839年间，他得到了确定二次型类数的公式。他用“若在n个抽样中，存在$n+1$个事物，那末至少在1个抽象中，至少包含2个事物”的狄利克雷抽样法，阐明代数数域的单位群的结构。狄利克雷发

展了代数数域中关于单位的一般理论。他的《数论讲义》（1863年）及其补编中有许多关于理想方面的重要内容。在此书的第三版（1879年）中，还对阿贝尔群的特征指标作了一般性的描述。在1841年，他证明了一个关于在复数$a+bi$的级数中的素数的一个定理。他还证明了当$n=5$时，费尔马大定理的正确性。

在力学和物理中，特别是位势理论方面，他有突出的贡献。例如，他把所谓狄利克雷原理引入到变分法中。这一原理假定在已知边界条件下使积分$\int(V_x^2+V_y^2+V_z^2)d\tau$达到极小的函数V是存在的，后来这成为黎曼在位函数论中解决问题的一个强有力的工具。

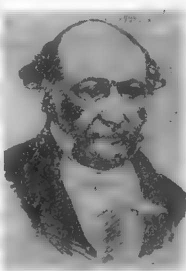
狄利克雷是高斯的学生和继承人。他毕生敬仰高斯，对高斯的《算术研究》爱不释手，即使在旅行中也总是随身携带并反复研究。在1849年7月16日，格丁根大学为高斯获得博士学位50周年举行庆祝会，席间高斯要用《算术研究》的一页原稿点烟，狄利克雷发现后不胜惊恐，立即冒失地从高斯手里夺了过来，并终生加以珍藏。在听过高斯讲课很多年之后，他仍回味无穷，并说高斯的讲课是“一生所听过的最好、最难忘的”。他的《数论讲义》是高斯《算术研究》的进一步发展。它不仅全面清晰地阐明了高斯的《算术研究》，而且也包含了他自己不少的创见。《数论讲义》对后来很多的数学家，如黎曼、克罗内克（Kronecker）、埃森斯坦（Eisenstein）等都产生过很大的影响。

自狄利克雷于1855年从柏林到格丁根接替高斯的工作后，在德国便形成了两个重要的数学研究中心，也可以说是具有不同风格柏林学派和格丁根学派。狄利克雷很注重同德、法等外国数学家的交流。其主要论文收集在《狄利克雷论文集》里，共两卷，分别出版于1889年和1897年。

哈密顿(Hamilton, William Rowan)

(1805—1865)

哈密顿是英国数学家、物理学家。1805年8月4日（另一说3日）生于都柏林；1865年9月2日卒于都柏林。



哈密顿

哈密顿是律师之子，父母早亡，由精通多种语言的叔叔培养。哈密顿自幼天资过人，是出名的“神童”，相传14岁时，就能流利地讲13种外语，并喜爱古典文学。但在他13岁时，碰巧遇到一位来自美国的计算神速的儿童科尔伯恩（Colburn），便激起了他对数学的兴趣，继而自学了克莱罗的《代数基础》、牛顿的《自然哲学的数学原理》和拉普拉斯的《天体力学》等名著。17岁时就发表文章订正《天体力学》证明中的一个错误，从而使天文学家大为惊异。1823年以第一名的优异成绩考进了都柏林的三一学院，成为超群的优等生，常常一人囊括各种学习比赛的奖励，尤其是数学和古典文学，总是冠盖群雄。当他22岁还未毕业时，就被破格任命为三一学院的天文教授，并担任了爱尔兰皇家天文台台长之职。1835年获得爵士头衔，1836年获得英国皇家学会皇家勋章。1837年被选为爱尔兰皇家科学院院长。

1828年，他发表《光线系统的理论》这篇论文，为几何光学奠定了基础，并引进了所谓光学的特征函数。爱尔兰皇家科学院

院长希龙戈利（Brinkley）教授，将这篇论文推荐给皇家科学院时称赞道："我不是说哈密顿将成为数学家，而是说他现在就是第一流的青年数学家。"1830—1832年间，他从数学的推演中，得出在双轴晶体中按某一特殊方向传播的光线，将产生折射光线的一个圆锥，这一发现揭示了光传播的重要几何性质。哈密顿在数学上有很大贡献。以他的名字命名的哈密顿算符、哈密顿函数、哈密顿线性度量空间，以及哈密顿-奥斯特罗格拉茨基-雅可比方程等尤为著名。他还研究了波形曲面理论；充实了伽罗华（Galois）的理论。特别是在他生命的最后20年中，花了大部分时间和精力从事四元数的研究。他定义的四元数表明存在无矛盾的数系，其中乘法交换律并不成立。从而打破了对传统的"数系"的认识，进而把代数从古老而濒于僵死的框架中解放了出来，鼓舞了许多数学家对各种类型的线代数进行广泛的研究，推动了近世代数以及算子代数的发展。四元数的发现不但直接打开了人们长期囿于复数的视野，启发人们去发现各种抽象的数系。哈密顿还把四元数引入微积分，定义了描述函数的数量或方向两个方面的变化的概念"梯度"、"散度"、"旋度"、"聚度"，成为研究物理学、工程技术的重要计算工具。后来哈密顿的学生、英国物理学家麦克斯韦尔在掌握了四元数之后，又利用向量分析等数学理论，建立起著称于世的电磁理论。另外由此发展起来的非交换代数已成为量子力学以及真正了解原子内部结构的数学基础。

在物理学方面，哈密顿发展了分析力学。其中最大的功绩是他1834年建立的著名的最小作用原理（现称哈密顿原理）。这个原理认为："一个系统在从一点到另一点的运动中，一定选取使作用量为最小的那条途径。"这就是有名的哈密顿原理，它发展了达朗贝尔原理，在很多方面比达朗贝尔原理更简单、自然、实用。不仅从它容易推出变分学中的拉格朗日方程，而且是近似求解动力学的基础。它在现代的数学物理中有着广泛的应用。近代

物理学家薛定谔（Schrödinger）就曾说过："哈密顿原理是近代物理的基石。"

哈密顿诚然天赋过人，但他的成就主要是依赖于他的勤奋好学和追求真理的精神。他善于从对比中发现问题，坚持不懈地通过具体分析、归纳，从中找出一般性的规律。他治学严谨，在解决数学或物理的问题时，认真细致、有条不紊。为了检查和证明一个结论，常常反复做大量的计算和试验，就连走路时也在思考数学和科学问题。例如，四元数的乘法的基本公式，就是他在都柏林城外皇家运河边散步时想到的。他晚年说：我希望把"勤奋和热爱真理的人"这几个字作为我的墓志铭。

哈密顿在国际上有很高的威望：他是英国皇家学会的会员、法国科学院院士、彼得堡科学院通讯院士。在他逝世前夕，还被美国国家科学院选为第一个外国的院士。德国数学家雅可比1842年在英国曼彻斯特召开的大英学术协会总会上称赞哈密顿是英国的拉格朗日。1943年爱尔兰政府为了纪念四元数发现100周年，特别发行了印有哈密顿头像的邮票。爱尔兰政府还在都柏林皇家运河的勃洛翰桥上立下一块石碑，上面刻有："在1843年10月16日，当威廉罗旺·哈密顿爵士走过这里时，天才的闪现使他发现了四元数乘法基本公式$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$，并把这个结果刻在了这桥的石头上。"

刘维尔（Liouville, Joseph）

（1809—1882）

刘维尔是法国数学家，1809年3月24日生于圣奥梅尔；1882年9月8日卒于巴黎。



刘维尔

刘维尔1830年毕业于法国道路与桥梁工程学院。1833年以后，先后任巴黎综合工科学校、索邦大学和法兰西学院、巴黎大学理学院的教授。1839年当选为法国科学院院士。1850年被选为英国皇家学会会员。他还是彼得堡科学院的名誉院士。

刘维尔对复变函数、椭圆函数、微分方程、积分方程、代数几何、超越数、数论都作出了贡献，发表了约400篇论文，其中有200多篇是数论方面的。

刘维尔发展了椭圆函数论。他在1844年阐明了从雅可比的定理出发如何建立起双周期函数的一套完整理论，这个理论是椭圆函数论的一个重要方面。在对双周期函数的分析中他发现了椭圆函数的一个重要性质和理论上的统一观点：双周期函数是比椭圆函数更广泛的一类函数，它具有椭圆函数的基本性质。

在解析函数论中，刘维尔提出了一个重要定理：每一个有界整函数是一个常数。他还研究了判断代数函数积分解析性的准则。

刘维尔研究了常微分方程边值问题中求解特征值和特征函数

的方法。在微分方程的教科书中，常用来证明解的存在性的所谓皮卡（Picard）逐次逼近法，其实是由刘维尔于1838年最早提出并使用的，而在50年后由皮卡推到更一般的形式。刘维尔还研究了微分方程的边值问题，其方法现在称为斯图姆-刘维尔理论，它是20世纪数理方程和积分方程理论中的核心内容之一。刘维尔还研究过发散级数，并提出了一个用发散级数求解微分方程的方法。

对于积分方程，刘维尔独立于阿贝尔自1832年起就陆续给出了某些特殊类型的积分方程的解。他跨出的最有意义的一步是，某些微分方程是怎样通过化成等价的积分方程来求解的。

在代数几何中，他研究过双有理变换。所谓反演变换便是出现的第一个双有理变换，其在物理上的应用首先为刘维尔所认识，并把它称之为半径互为倒数的变换。他对微分几何的重要贡献是曲面可贴性和保形变换理论。

刘维尔在1851年证明了超越数的存在。他证明了下述形式的任何一个数都是超越数

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots,$$

其中a_i是从0到9的任意整数。

在数论方面，他研究了代数数列的有理近似法，并取得了重要成果。

刘维尔研究过统计力学的基本定理和经典动力学方程积分的定理，其中著名的刘维尔定理是统计力学和度量理论的基础。

刘维尔1836年创办了《纯粹与应用数学》杂志，并担任该杂志编辑达40年之久。此杂志不但以迅速传播数学的新成就著称于世，而且哺育了不少数学英才，很多著名数学家，如普吕克（Plucker）、斯图姆、雅可比、狄利克雷、勒贝格(Lebesgue)等，都从这个杂志受益匪浅，有的人就是从这个杂志上开始展露头角而迈进数学家行列的。特别是1846年该杂志率先发表被冷落多

年的伽罗华的论文《论方程的根式可解性条件》，刘维尔并为这篇论文作序向数学界推荐，这表明了刘维尔的远见卓识。刘维尔创办的这个杂志为促进数学的发展做出了卓越贡献，在国际上享有很好的声誉，被数学家们誉为《刘维尔杂志》。

刘维尔是一位优秀的教师，他一生乐于对青年人热心指导，具体帮助，从而使他的不少学生都在学术上很有成就，例如埃尔米特就是由他发现、培养起来的一位著名数学家。

李善兰 (Li Shanlan)

(1811—1882)

李善兰（原名心兰）字竟芳、号秋纫（别号壬叔）是我国清代数学家、教育家。1811年1月2日（清嘉庆十五年十二月八日）生于浙江海宁县；1882年12月9日（清光绪八年十月二十九日）卒于北京。



李善兰

李善兰自幼聪敏好学，10岁时偷看了私塾老师书架上的《九章算术》，引起了他对数学的兴趣。15岁那年，又读了徐光启、利玛窦合译的欧几里得的《几何原本》前6卷，接着又研读了李冶的《测圆海镜》，戴震的《勾股割圆记》等数学著作，到30岁时已具有很深的数学造诣，并开始撰写数学论著。1852年到上海墨海书馆，从事翻译数学、力学、天文等西方近代科学著作的工作。1860年应江苏巡抚徐有壬的邀请，到苏州作他的幕宾。1863年到安庆曾国藩军中作幕僚。1868年出任北京同文馆天文算学总教习。

李善兰是我国清代数学界的巨擘、是我国微积分学的先驱。在解析几何与微积分尚未传入我国前，于1845年左右，他就发表了具有微积分方法的三部论著：《方圆阐幽》（1卷）、《弧矢启秘》（2卷）、《对数探源》（2卷）。其中载有他创立的“尖锥求积术”，其“尖锥”是一种处理代数问题的几何模型。在《方圆阐幽》中，他用尖锥之和的方法来探求任意图形面积问

题，并得到了相当于定积分公式 $\int_0^h ax^n dx = \frac{ah^{n+1}}{n+1}$ 和逐项积分法则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^h \frac{b}{h^2}x^n dx\right)=\int_0^h\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{h^2}x^n\right)dx$ 的等价命题。在这本书中，还得到了与二项式平方根的幂级数展开式

$$\sqrt{1-x^2}=1-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!!}x^4+\frac{3!!}{6!!}x^6+\frac{5!!}{8!!}x^8+\cdots\right),$$

和π的无穷级数表达式

$$\pi=4-4\left(\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 4!!}+\frac{3!!}{7\cdot 6!!}+\frac{5!!}{9\cdot 8!!}+\cdots\right)$$

的等价物。在《弦矢启秘》中，他阐述了三角函数和反三角函数的幂级数展式，并得到了与：

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{1}{3!}\alpha^3+\frac{1}{5!}\alpha^5-\frac{1}{7!}\alpha^7+\cdots,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\alpha+\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{2}{15}\alpha^5+\frac{17}{315}\alpha^7+\cdots,$$

$$\sec\alpha=1+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{5}{24}\alpha^4+\frac{61}{721}\alpha^6+\cdots,$$

$$\alpha=\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\alpha+\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5\alpha-\frac{1}{7}\mathrm{tg}^7\alpha+\cdots,$$

$$\alpha^2=\sec^2\alpha-\frac{6}{9}\sec^4\alpha+\frac{46}{90}\sec^6\alpha-\frac{44}{105}\sec^8\alpha+\cdots,$$

的等价物。在《对数探源》中，他认为对数可以用诸尖锥的合积来表示，对数函数可以用幂级数来展开，并指出任何自然数n的对数可以用公式$\lg n=\lg(n-1)+\lg e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kn^k}$来计算。李善兰创立的尖锥术的理论，虽然还欠严谨，但在微积分学未有中译本之前，他的巧思妙算很有启蒙意义。英国传教士、汉学家伟烈亚力

(Alexander Wylie, 1815—1887年) 看了李善兰的著作之后说："李君秋纫（善兰）所著各书，其理甚近微积分。"除了上述三部著作外，李善兰还著有《垛积比类》、《四元解》、《麟德术解》、《椭圆正术解》、《椭圆新术》、《椭圆拾遗》、《火器真诀》、《对数尖锥变法释》、《级数回求》、《天算或问》等。因此他的论著共有13种24卷。其中《垛积比类》是一部讨论高价等差级数的著作，李善兰从研究我国传统的垛积问题入手，获得了一些相当于现代组合数学中的成果。例如，"三角垛有积求高开方廉隅表"和"乘方垛各廉表"实质上就是组合数学中的第一种斯特林数和欧拉数。他在研究高阶等差级数求和问题时，提出的恒等式 $\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2C_{n+2k-j}^{2k}=(C_{n+k}^k)^2$，受到国际数学界的赞赏，并誉为"李善兰恒等式"。《考数根法》是我国素数论方面的第一本著作。在辨别一个自然数是否为素数时，李善兰证明了：如果 a^d-1 能被N整除，而N是一个素数，那末 $N-1$ 必能被 d 整除。但 d 能除尽 $N-1$，仅是N为素数的必要条件而不是充分条件。从而，他证明了费尔马素数定理，并且指出它的逆命题不真。

李善兰的数学著作汇编于同治六年（1864年）出版的《则古昔斋算学》中。

李善兰是微积分在我国的杰出传播者。我国第一本微积分学的译本《代微积拾级》（18卷），就是李善兰和伟烈亚力根据美国人罗密士（Elias Loomis, 1811—1889）1850年著的"Analytical Geometry and Calculus"译出的。译名的"代"指的是解析几何（当时叫代数几何），"微"指"微分"，"积"指"积分"。"calculus"译作"微积"。《代微积拾级》是1859年5月10日（清咸丰九年四月八日）在上海墨海书馆印行的。李善兰还与伟烈亚力合译了：欧几里得的《几何原本》(后9卷)（1856

年译就），英国人棣摩根（Augustus DeMorgan，1806—1871年）的《代数学》（13卷），《谈天》（天文学名著，18卷），于1858年由墨海书馆出版。李善兰还与英国人艾约瑟（Joseph Edkins，1823—1905年）共译了《重学》（力学著作，20卷，这是第一本系统介绍力学的中译本。），《圆锥曲线说》（3卷）。他还参加翻译了《植物学》（8卷）和《奈端数理》（即牛顿《自然哲学的数学原理》）（4卷）（未刊）。李善兰在译书时，创译了许多数学名词和术语，例如："代数"、"系数"、"根"、"多项式"、"常数"、"变数"、"自变数"、"因变数"、"函数"、"方程式"、"微分"、"积分"、"级数"、"几何数"、"轴"、"平行"、"切线"、"法线"、"渐近线"……等等。这些贴切恰当的名词和术语，不仅在我国流传，而且有的东渡日本，沿用至今。李善兰的翻译工作不但促进了近代数学在我国的普及，而且架起东西方科学文化交流的桥梁。

李善兰不仅是数学家、翻译家，而且是教育家。1868年，他出任北京同文馆天文算学总教习，并亲自为学生讲授《代数积拾级》，一直执教到68岁高龄才离开讲坛。所教学生"先后约百余人，十余年如一日"且能"合中西之各术，绍古圣之心传，使算学复兴于世"，张之洞说"五十年来为此学（算学）者甚多，…李善兰为最"。在任北京同文馆天文算学总教习期间，他还审定了《同文馆算学课艺》、《同文馆珠算金鍼》等数学教材。

李善兰勤奋刻苦，热爱科学教育事业，积极参与洋务运动。他迫切希望通过学习、引进外国先进科学技术，以促进我国科技事业的发展，从而增强祖国实力，以致有朝一日"人人习算，制器日精，以威海外各国。"他虽然晚年官至三品，授户部正郎、广东司行走、总理各国事务衙门章京等职，但从未中断过科学研究，学术精湛，著译如林。能"仰承汉唐，荟萃中外"，成一家之言。

李善兰博学多才，除科学著述外，尚工诗善文，有几种诗文集流传于世。

魏尔斯特拉斯 (Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm)

(1815—1897)

魏尔斯特拉斯是德国数学家。1815年10年31日生于奥斯腾费尔德；1897年2月19日卒于柏林。



魏尔斯特拉斯

魏尔斯特拉斯是一位海关官员之子。在青年时代已显示出对语言学和数学的才华。但是1834年其父却把他送到波恩大学学习法律与财政学。由于事与愿违，精神萎顿，把时间消磨在击剑和饮酒之中，4年以后未获得学位返家。1839年为取得中学教师的资格而进入闵斯特学院，并在数学家古德曼 (Gudermann) 指导下自修数学。1841年通过考试而获得中学教师的职务，先后在蒙斯特、达赤克郎、布伦斯堡等中小城镇的中学任教达15年之久。他除了教数学外还教物理、德语、作文、地理、体育，以至教儿童写字。

魏尔斯特拉斯酷爱数学。但白天有繁重的教学任务，只好利用晚间，刻苦地钻研数学。某夜，由于研究一个数学问题，竟不知道已经天明，直到校长到寝室来查看为什么没有上8点钟的课时，他才猛然醒悟，请求校长谅解。虽然他废寝忘食地研究，写出过不少数学论文，但由于只是一位中学教师而未受到科学界的重视，直到1854年他发表了《关于阿贝尔函数理论》的论文，成

功地解决了椭圆积分的逆问题，才轰动了数学界，柯尼斯堡大学也立即授予他名誉博士学位。1856年被聘为柏林大学助理教授、1864年成为该校教授，这一职位一直保持到1897年去世。他还被选为法国科学院和柏林科学院院士。

魏尔斯特拉斯是将分析学置于严密的逻辑基础之上的一位大师，被后人誉为“现代分析之父”。他在分析严密化方面的工作改进了阿贝尔、波尔察诺、柯西等人的工作。他的口号是“分析的算术化”，他追求严谨，力求避免直观，而把分析奠基在算术概念的基础上。给出了现今微积分教材中的“ε—δ”的极限定义和函数在一点连续的定义，从而把莱布尼茨的固定无穷小，柯西的“无限趋近”、“想要多小就多小”、“无穷小量的最后比”等等不明确的提法给以精确形式的描述。他运用波尔查诺在证明“有界实数集存在上确界”时所采用的区间套方法，证明了现在被称为魏尔斯特拉斯-波尔察诺的聚点定理“有界无限点集，必有聚点”。他陈述了闭区间上连续函数必定达到其上确界和下确界的性质。他在幂级数的基础上建立解析函数的理论和解析延拓的方法，提出了级数理论中关于一致收敛的概念及其判别准则。特别值得指出的是他给出了一个所谓“病态函数”，即一个处处不可微的连续函数。在19世纪初期，一般人都认为每一个连续函数都是可微的，只可能在一些孤立点处出现例外。但魏尔斯特拉斯在1861年的讲课中就明确提出，要想从连续性推出可微性的任何企图都必定失败。并于1872年7月18日在柏林科学院的一次讲演中，正式给出了下述处处不可微的连续函数的例子：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos\ (a^n\pi x)\ ,$$

其中a是一个奇数，b是$(0,1)$中的一个常数，使得$ab>1+3\pi/2$。这个无穷级数在实轴上一致收敛，所以和$f(x)$是处处连续的。但是，可以推出，当给定任何点x_0和任何正数M时，存在与x_0任意

接近的点x_1和x_2，使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}>M,\qquad \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}<-M。$$

因此，函数$f(x)$在点x_0是不可微的。

这个病态函数使数学界大为震惊。因为它说明了连续性并不蕴含有可微性，也说明函数可以具有各种各样的与人们直观相悖的反常性质。其历史意义是巨大的，它使数学家们再也不敢直观地或想当然地对待某些问题了，也促使数学家们清楚地认识到重新考虑分析基础是多么的必要。特别认识到，有理数在实直线上留下的空洞必须用新定义的实数（无理数）加以填补，否则分析学不会有牢靠的基础。魏尔斯特拉斯还用“递增有界序列”的极限来定义无理数，使实数系统得以完备。

魏尔斯特拉斯除了对分析基础作出了巨大贡献之外，还写下了超椭圆积分、阿贝尔函数等方面的论文。在变分学方面，他给出了泛函达到强极值的充分条件，是用现在所谓的魏尔斯特拉斯函数表述的，还研究了含有参数的泛函的变分问题，及变分问题的间断线。在微分几何方面他研究过测地线和最小面积。在线性代数方面，他和史密斯一道创立了λ矩阵和初等因子理论，并对双线性和二次型作过深入研究。

魏尔斯特拉斯是一位优秀教师。他对花费在初等数学的岁月从不感到遗憾，他的杰出教学才能不仅表现在中学教学上，而且也是享有世界盛誉的高等数学教师。他尽管已经成名，但仍保留他早年的生活情趣还是喜欢喝啤酒，经常跟他的学生聚会在一起，无论是有才气的学生还是一般的学生他都乐于给他们以帮助和指导。他治学严谨在讲课前总是精心准备讲稿，对每一个细节都加以推敲。他在柏林大学的讲课吸引了许多听众。魏尔斯特拉斯对数学的许多发现并不完全存在于他发表的论著中，而更多的是在听其讲课时记下的笔记里。他的讲义收集在《著作集》（8卷，1894—1927年）中。“魏尔斯特拉斯式的严谨”成为“极仔细地

推理”的同义词。他的工作培养了不少杰出的数学家，例如，柯瓦列夫斯卡娅 (Kowalewsky) 、施瓦兹 (Schwarz)、富克斯(Fuchs)、米塔格—莱夫勒(Mittag-Leffer)，弗罗伯尼 (Frobenius)、基林(Killing)、……等。他的许多学生都骄傲地声称自己是“柏林学派”——建立在魏尔斯特拉斯思想上的学派——的成员。他德高望重，晚年倍受人们的推崇。

斯托克斯 (Stokes, Sir George Gabriel)

(1819—1903)

斯托克斯是英国数学家、物理学家。1819年8月13日生于爱尔兰斯克雷恩；1903年2月1日卒于剑桥。



斯托克斯

斯托克斯出生在一个教会家庭里，他的父亲是个教长，亲母是一位教长的女儿，他兄弟中有三人从事圣职。早年接受父亲和本教区的一位书记的教育。18岁时，进剑桥大学彭布罗克学院，1841年以优异成绩毕业。1849—1903年任剑桥大学数学和物理学教授。1851年被选为英国皇家学会会员，1854—1885年任该会秘书达30年之久，1885—1890年任皇家学会会长。1869年任英国科学促进会主席。他还是法国科学院院士。

斯托克斯对数学和物理学都作出了杰出贡献。在数学方面，1848年以前他就清楚地认识到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一致收敛原理，但他未能予以严格地表述。他用贝塞尔 (Bessel) 函数建立半收敛级数和其它调和级数。通过对傅里叶级数的研究详细阐述了全收敛和有限收敛的级数。他认识到发散级数一般地可用来解微分方程，1856年和1857年给出了几个有实用价值的代表性例子。1849年他在论文《关于运动流体内部摩擦的理论》中，导出了偏

微分方程里著名的斯托克斯方程。关于微积分教程的曲面积分中以他的名字命名的那个斯托克斯定理，却有一段值得指出的渊源：这个定理首次出现于汤姆生1850年7月2日致斯托克斯的一封信末附笔中，而它公开出现则是作为1854年史密斯奖金竞赛考试的第8题（这个竞赛考试每年由剑桥大学最好的数学学生参加），由于自1849年到1882年这个竞赛考试都是由斯托克斯主持，因此当斯托克斯去世后，这个定理就以斯托克斯定理之名而流传于世。但他的同时代人，至少对这个定理给出了三个证明：汤姆生独立地给出了第一个；姆汤生和泰特后来又在他们合著的《自然哲学》中给了第二个；麦克斯韦尔在《电磁论》中给出了第三个。此后斯托克斯定理被用于广泛得多的结果，这些结果在数学的某些部分（例如，流形上的微积分）的发展中十分突出，以致斯托克斯定理可以看作研究"推广"方法价值的一个著名实例。

在物理学方面，他系统地研究了流体力学、固体力学、波在弹性固体内的性态，以及光的衍射等。对斯托克斯来说，数学是进行物理研究的重要工具，他是第一流的数学物理学家。他建立了现代液体粘滞性理论，为流体力学奠定了基础，并发展了粘性液体运动的数学原理。描述粘性液体中小球运动规律的称为斯托克斯定律，后人为纪念他对流体粘滞性的研究成就，把运动粘度单位定为"斯托克斯"。他研究了光的波动理论；所撰写的关于引力变异的论文，使他成为近代大地测量学的奠基者。他还研究过荧光、声学及光学，并利用紫外线所产生的荧光来研究紫外辐射。他第一个发现紫外线可以穿过石英，但透不过通常的玻璃。

斯托克斯的主要著作有：《光学》（1887年）、《自然神学》（1891年）、《数学与物理学论文集》（1880—1905年）等。

斯托克斯是继牛顿以后，一身兼任卢卡斯教授、皇家学会秘书、皇家学会会长三职的人。他不但是19世纪英国剑桥数学物理

学派的重要代表人物，而且也是促使自然科学要重视实践活动的一位科学家。斯托克斯为人谦逊，虽然他早在1854年就预见到了后来的基尔霍夫（Kirchhoff）理论，有人说他在这方面领先，但他总是坚持说他并没有看到其中某些关键之处，认为自己没有资格享受领先的荣誉。他热心支持学术团体的活动，不辞辛苦，并诲人不倦。他1852年荣获皇家学会朗福德（Rumford）奖，1893年荣获皇家学会科普利（Copley）奖，1889年被封为从爵士。

黎曼 (Riemann, Georg Friedrich Bernhard)

（1826—1866）

黎曼是德国数学家。1826年9月17日生于汉诺威的布列斯伦茨；1866年7月20日卒于意大利的塞那斯加。



黎 曼

黎曼的父亲是一个乡村的穷苦牧师。黎曼19岁时遵照父亲的愿望，进入了格丁根大学学习哲学和神学，打算继承父志当一名牧师。然而一到了格丁根大学他立刻被这里的数学教学和研究的气氛所感染，从而对数学心驰神往，便放弃了神学转攻数学。在大学期间有两年去柏林大学就读，在那里深受雅可比、狄利克雷的影响。1849年回到格丁根，并有幸成为高斯晚年的学生。1851年，他以一篇优秀的数学论文取得博士学位。但3年后才被聘为格丁根大学的一名编外讲师，又过了两年才被聘为副教授，在这期间靠微薄的工资过着清贫的生活。到1859年被聘为教授时，贫困的生活虽然熬了过去，但身体却垮了下来，结婚后一个月便得了肋膜炎，从此卧床不起，1866年终因肺结核去世，年仅39岁。

黎曼1851年的博士论文《单复变函数的一般理论的基础》，被认为是近代数学史上最重要的文献之一。他把单值解析函数推广到多值解析函数，并引入了“黎曼曲面”的重要概念，从而确

定了复变函数论的几何基础。他的复分析中的几何方法乃是拓扑方法的真正开始。他把拓扑的思想用到分析中，完成了对定向闭曲面的拓扑分类，同时把同类黎曼面集中在一起，形成了“参模”的观念。高斯在审阅完他这篇论文时说：“黎曼先生提出的论文是一种令人信服的证据，说明作者对他所论述的那些题材有彻底深入的研究，说明他具有创造性的、活跃的和真正数学家的头脑，并具有辉煌而丰富的独创精神。”但黎曼这篇论文，除了高斯以外，当时并没有受到别人的理解和赞赏。

1854年，黎曼为了获得格丁根大学编外讲师的资格，呈交过一篇题为《关于利用三角级数表示一个函数的可能性》论文。在这篇论文中，黎曼指出了可积分的函数不一定是连续的和分段连续的，从而把柯西积分进行了推广，直到今天这一论断对微积分的基本应用仍然是最方便和最有价值的；黎曼给出了，一个以2π为周期的函数能表示为一个收敛的三角级数的必要条件，以及一个函数的傅里叶展式收敛到它本身的狄利克雷条件——即关于三角级数收敛的黎曼条件；他还在这篇文章中证明了：“可以把任一个条件收敛的级数的项适当重排，使新级数收敛于任何预先指定的和数，或发散或为∞或$-\infty$。”黎曼这篇论文，内容丰富、思想深刻，对积分、级数和集合以及实变函数等数学理论的进一步发展都产生了积极作用。

黎曼在被聘任为格丁根大学的编外讲师之前曾要求他在教授会议上作关于几何基础的讲演。这在数学史上也是最成功的学术讲演之一。他以其坚实的数学基础和深邃的洞察力，对所有已知几何——包括欧氏几何和非欧几何（其中包括现在以他的名字命名的黎曼几何），作了纵贯古今的归纳与概括、提炼与升华，使空间和几何都得到开拓，他的真知灼见使高斯赞叹不已。这篇讲演 1868 年以《关于几何学基础的假设》为题出版。在这本名著里，黎曼采用了纯粹的解析方法，得到了与欧几里得和罗巴切夫斯基（Lobatchevsky）几何都不相同的黎曼几何学。在这种几何

中，虽然也是由两点决定一条直线，三点决定一个平面，二平面交于一条直线，但过直线外一点却不能作出该直线的平行线，因为他有一条定理：三角形的内角之和大于180°。所以黎曼在展开他的几何系统时，对欧几里得公理作出了比罗巴切夫斯基更为大胆的变动。从本质上看，黎曼空间与欧几里得空间的差别有如曲面与平面的差别。正因为他采用了全新的分析方法，才使他能够容易地把曲率的概念推广到高维的情形，使得黎曼空间成为理论物理，特别是爱因斯坦（Einstein）的相对论的数学模型。更有甚者，他把欧几里得空间、罗巴切夫斯基空间作为特殊情况包括进来，并弄清了这些几何学之间的密切关系。为后来用微分几何的观点把从如此对立的公理体系所导出的结果加以统一，为克莱因（Klein）流芳千古的"爱尔朗根纲领"讲演，为希尔伯特建立公理化的研究方法（特别是历史名著《几何基础》的问世），从而为19世纪整个数学的发展，在思想、理论和方法上奠定了基础。

1859年，黎曼发表了《在给定大小之下的素数个数》的论文，这是关于素数定理的一篇不到10页但思想却极为深刻的论文。其中提出的一个重要猜想——黎曼猜想，成为后来数学家们竞相研究的对象。他研究数论的方法与前人不同，大量地使用了解析函数的工具，从而开创了解析数论这一新的分支，同时也促进了解析函数论的发展。

黎曼的研究是广泛的，他对超几何函数、阿贝尔函数、微分方程、代数几何诸多领域都有重要成果。

黎曼不但对纯数学作出了巨大的贡献，而且对物理学，特别是数学物理之间的联系有浓厚的兴趣。他写过关于热、光、磁、气体理论、流体力学以及声学方面的论文。

黎曼的一生是短促的，留下的著作虽廖若辰星，但却发出耀人夺目的光彩，引来了近代数学的黎明。

戴德金 (Dedekind, Julius Wilhelm Richard)

(1831—1916)



戴德金

戴德金是德国数学家。1831年10月6日生于布伦瑞克，1916年2月12日卒于布伦瑞克。

戴德金在布伦瑞克上大学预科时，主要兴趣是物理学和化学。而1848—1850年在卡罗林学院学习时，兴趣转向了微积分、代数、解析几何。1850年入格丁根大学，并在高斯指导下研究数学，他也是狄利克雷的学生和挚友。戴德金在21岁时，以一篇关于欧拉积分的论文获哲学博士学位。1854—1858年在格丁根大学任副教授，1858—1862年在苏黎世综合工科学校任教授，1862—1912年在布伦瑞克综合工科学校任教授达50年之久。戴德金是法国科学院、柏林科学院、罗马科学院的院士，并获得奥斯陆大学和苏黎世大学的荣誉学位。

戴德金20多岁时就开始撰写关于分析学和概率论方面的论著，从1856年起发表数论方面的论文，并整理他的老师狄利克雷的《数论讲义》，此后集中精力研究数论、代数学方面的问题。

戴德金是实数理论的奠基人之一。两千多年前的毕达哥拉斯已经发现了不可公度量的存在，而且欧多克索斯也曾提出扩充有理数系的技巧。但这些数学理论却在欧几里得的著作“元论”中

沉睡了一千多年，直到数学分析首先在德国发展到现代阶段，才被戴德金接过来，加以改进和发展，应用到无理数的定义上去，这就是数学上有名的“戴德金分割”。他通过对直线的分割来定义无理数：即把数列想象为表示一条直线上的点，直线可以用某种方式分割，通过仔细的数学推理可以证明，分割可以处在一个有理数的地方，也可以处在一个无理数的地方，但在这两种情况下运算规则都适用。从而把有理数系完备化为实数系。由于实数能够与实直线上的点一一对应，从而使得两千多年来存在于算术和几何之间的鸿沟得以完全填平，无理数不再是“无理”的数了，进而把微积分置于完全严密的逻辑基础之上。1888年他在《数是什么，数应该是什么？》一书中建立了严格的数的理论。他提出了算术公理的完整体系，其中包括对完全数学归纳法原理的准确表达。还把映象概念用最一般的形式引入到数学中。他是康托尔集合论的最早支持者之一，他的自然数理论就是以集合概念为基础的，并成为后来数学中逻辑主义的先导。递归函数的概念也是他第一次提出的。

戴德金在抽象代数领域有过出色的贡献，他研究了抽象的域、环、群、结构及模等问题；创立了关于理想的一套理论。为了给理想理论建立起公理化体系，他研究了代数结构中的群和格；并给有限群一个抽象的定义，这个群是从他的置换群导出的；他提出了理想环的概念，并给以确切的定义，他以全新而有启发性的方式探讨唯一析因子理论。在他编辑的狄利克雷的《数论》(Zahlentheorie, 1871)第2版附录10中，发表了自己研究的结果。在同一书的第3版和第4版的附录中又扩充了这些结果，其中包括由他创立的现代代数数理论，他的代数数理论是高斯的复整数和库麦(Kummer)的代数的普遍化。代数数域中的戴德金ζ函数以及他同韦伯(Weber)合著的代数函数的代数理论都是他的重大贡献。如此众多的成果，使他被誉为抽象代数的先驱。

戴德金的主要著作有：《连续性与无理数》、《数的性质与

意义》、《数学论文集》等。他还出版了狄利克雷的《数论讲义》，并加入了《第十一个补充》。他与韦伯一起出版了《黎曼全集》。许多数学上的命题和术语，如环、域、结构、截面、函数、定理、互换原理等，都是与戴德金的名子联系在一起的。

戴德金终生未娶，不计功名，不贪利禄，俭朴谦逊，淡薄宁静，故饱学高寿，享年85岁。他虽然从没在格丁根任过教，但是他在精神上是与格丁根学派，特别与希尔伯特本人的学术思想是一脉相通的。

达布 (Darboux, Jean Gaston)

(1842—1917)


达　布

达布是法国数学家。1842年8月14日生于尼姆；1917年2月23日卒于巴黎。

达布1864年毕业于巴黎高等师范学校，1866年获博士学位。1867年在中学任教。1872—1881年在巴黎高等师范学校任教。1881年4月起任巴黎大学理学院教授，1889—1903年任理学院院长，后任名誉院长。1884年当选为法国科学院院士。1895年被选为彼得堡科学院通讯院士。同时还聘为英国皇家学会会员和其它国家科学会的会员，并荣获国内外许多大学的名誉学位。

达布对数学和物理的许多方面都很有建树，特别是在数学分析、微分几何、微分方程等领域有更大的贡献。

在数学分析方面，他对函数连续性作了深入的研究。给出了一个"病态函数"，当从$x=a$变到$x=b$时，这个函数取遍两个给定值之间的一切中间值，但却不是连续的。这说明只满足连续函数的个别基本性质并不保证函数连续。因为当时对"连续性"还没有给出严格的定义。例如，

$$y=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & 当x\neq 0时,\\ 0, & 当x=0时,\end{cases}$$

这个函数取遍从x的一个负值所对应的函数值到x的一个正值所对应的函数值之间的一切值。但是这个函数在$x=0$点不连续。这类例子使人们对连续有了超出直观的、更多的理解。

达布对黎曼积分理论作了推广。他严格地证明了，不连续函数也可以求定积分，而且间断点可以有无穷多个，只要它们包含在长度可以任意小的有限个区间之内就行。即证明了一个有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是$f(x)$的间断点组成一个测度为零的集合。他在1875年还给出了推广意义下的微积分基本定理的证明。当$f'(x)$在黎曼-达布意义下可积时，仍有$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$。现在定积分理论里的所谓上积分、下积分、达布大和、达布小和以及达布定理等都是以他的名字命名的。

在解析函数论方面，他研究了球函数、正交函数，包括雅可比多项式的分解等问题，并取得了重要成果。

在微分几何方面，他关于曲面理论和曲线坐标的研究获得了许多重要结果，他研究了测地线及曲面的变形，并创立了流动坐标系方法。他的《曲面的一般理论和微积分的几何应用教程》（4卷，1887—1896年）是一部名著，在这部书中，不仅系统地介绍了18—19世纪曲线和曲面几何学方面所取得的成就，而且还包含了他自己研究的许多成果。此外，在这部著作中还可以看到射影几何的思想。

在微分方程方面，他研究了一阶常微分方程等问题。关于常微分方程的奇异解理论就是达布于1872年完成的。一般偏微分方程通解的定义，也是达布给出的。他还研究了微分方程的可积性及积分法问题，总结了拉普拉斯的级联方法，并将其应用于所有二阶偏微分方程中。他对用于非线性方程的蒙日方法作了较精确的阐述，被称为达布方程。

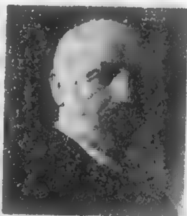
在物理学方面，他研究过运动学、平衡、点系微振等问题，并取得了成果。

达布1870年创办了有名的数学杂志《数学科学通报》。他的著作还有：《论异常曲线和代数曲面类及虚数理论》（1873年）、《正交系和曲线坐标教程》（1898年）等。

康托尔 (Cantor, Georg Ferdinand Philip)

(1845—1918)

康托尔是德国数学家。1845年3月3日生于俄国的彼得堡；1918年1月6日卒于德国的哈雷。



康托尔

康托尔是1856年随父母移居德国的。他的父母都是犹太人，其父生于丹麦哥本哈根，年轻时迁居彼得堡，其母生于罗马天主教家庭。康托尔自幼就表现出卓越的数学才能。先后就学于苏黎世、格丁根和柏林，并从师于库麦、魏尔斯特拉斯和克罗内克。他的父亲竭力主张他学工，但他受到魏尔斯特拉斯的影响而专攻纯粹数学，其父赞同了他的选择，并鼓励他将来能成为科坛明星。1867年以优异的成绩获柏林大学数学博士学位，1869年成为哈雷大学的讲师，1879年成为该校教授。1918年1月6日因精神病去世。

康托尔早年对数论、不定方程、三角级数发生兴趣。三角级数理论激励他认真地研究分析基础，并对三角级数唯一性问题的研究取得了重要成果。他证明的唯一性定理可以叙述为：如果对于一切x，有一个收敛的三角级数表示零，则系数a_n和b_n都是零。后来他在1871年的论文中证明了，即使在有限个x值上不收敛，这结论仍旧成立。这是康托尔论述x的例外值集合(set of exceptional values)的一系列论文中的第一篇。他还把唯一性的结

果推广到允许例外值是无穷集的情形。

康托尔是集合论的创建者。29岁时，便在《数学杂志》上发表了关于无穷集合论的第一篇革命性论文。虽然个别命题被某些数学家指出是错的，但整个论文在体系、观点、方法技巧方面所表现出的光彩夺目的智慧和离经叛道的精神，引起了数学界的极大注意。他在集合论与超限数方面的研究一直延续到1897年，并发表了一系列论文。分析的严密化揭示了人们有必要去理解实数集合的结构。为了处理这个问题，他引进了关于无穷点集的一些概念。他期望通过对无穷集合的研究，能把不同的无穷离散点集和无穷连续点集按照某种方式加以清楚地区分开来。为此，他构造了历史上有名的“康托尔集”、“康托尔序列”，提出了“连续统假设”以及“康托尔定理”。他与戴德金从几何直观上对直线进行分割以定义无理数的方法截然不同，采用有理数序列的极限来定义无理数。这种方法虽不如戴德金分割法直观，但更于分析的思想，为用基本序列来建立实数理论奠定了基础。他提出了无限集的势，并指出，任何集合的幂集的势都不小于它本身的势；直线、平面上所有点构成的集合，其势与直线上任意小的区间上的点集的势相等。还证明了超越数远远多于代数数，这些结果轰动了数学界。他还把欧几里得空间里一般点集作为研究的对象，定义了聚点、闭集、开集等概念，并证明了直线上的任一开集必定是可数个两两不相交的开区间的并集。康托尔不但是集合论的创始人，而且是维数理论的开拓者。他证明了一条线段上的点能够和正方形上的点建立一一对应，从而证明了直线上、平面上、三维空间，乃至高维空间R^n的所有点构成的集合，都有相同的势。他还用矩形和立方体等代替区间，把容量概念扩充到二维和高维点集。由于点集理论是一般拓扑学的基础，所以说康托尔是点集拓扑的奠基者。

康托尔的集合论是数学上最富革命性的理论之一，因此它的发展道路也自然很不平坦，曾受到同时代的一些大数学家的反对

和非难，其中尤以保守派代表、柏林大学教授、他的老师克罗内克最为强烈。克罗内克不但对康托尔的学术观点持严厉的批评态度，而且设置重重人事障碍使他在柏林无立足之地，甚至还攻击康托尔是“神经质”、“康托尔走进了超限数的地狱”。就连那个时代被誉为“博大精深、富于创举”的数学家庞加莱也把集合论当作一个有趣的“病理学的情形”来谈。外尔称康托尔关于基数的等级是“雾上之雾”。这些大数学家的指责和非难，而康托尔的性格倔强、易于激动，以及集合论中出现的某些悖论，从而使他经常处于精神压抑之中致使他1884年患了精神分裂症。最后死于精神病病院。但他生前曾充满自信的说：“我的理论犹如磐石一般坚固，任何反对它的人到头来都将搬起石头砸自己的脚，……因为多年来，我从各方面对它进行了考察，并对所有反对意见作了分析，更重要的是，我已追溯到这一理论最终无可怀疑的根源”。的确随着岁月的流逝、集合论日臻完善，特别是在近代数学产生与发展过程中的深远影响，使得康托尔那富有哲理的观点，对问题大胆而缜密的构思，以及在证明上表现出的高超巧技，都令人叹为观止。20世纪初世界上最伟大的数学家希尔伯特曾说：“从远古时代起，无限的概念就比任何其它概念都更激动着人们的感情。彻底弄清这一概念的实质性研究已远远超出了特殊的科学兴趣的范围，它是维护人类智力本身尊严的需要。迄今为止，对“无限”最深刻的洞察要属于康托尔创立的集合论了，它与一般哲学理论的关系，要比它与数学的关系更为密切。我认为，它是数学天才的最优秀作品，是人类纯智力活动的最高成就之一。因此，没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园中赶走。”苏联著名数学家柯尔莫戈洛夫（Kolmogorov）说：“康托尔不朽的功绩在于向无限冒险迈进。”英国哲学家罗素（Russell）把康托尔的工作誉为“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的成就”。

康托尔认为，在数学中提出问题的艺术要比解决问题的方法

更为重要。而康托尔恰恰在这两个方面都达到了登峰造极的地步。这与他生前潦倒，死后殊荣一起都让后人缅怀难忘。正如德国数学家兰道（Landau）所说：“康托尔和他所代表的一切是永存的，人类应当感谢被赐于了康托尔这样一位伟人，未来的一代将从他的著作中受到教益”。

斯蒂尔吉斯（Stieltjes, Thomas Jean）

（1856—1894）



斯蒂尔吉斯

斯蒂尔吉斯是荷兰法国籍的数学家，1856年12月29日生于荷兰兹沃勒；1894年12月31日卒于法国图卢兹。

斯蒂尔吉斯早年在代尔夫特综合技术学校学习，1877—1883年间在莱顿天文台工作，后迁居巴黎并加入法国籍。1886年获科学博士学位，同年被聘为图卢兹大学数学教授，直至逝世。

斯蒂尔吉斯主要研究连分数、矩量问题、正交多项式、近似积分、黎曼函数论、球面调和函数、级数以及分析中的其它问题。

斯蒂尔吉斯于1894年在其论文《连分数的研究》里，提出了解析函数论和实变函数论中几个全新的问题，为了表示解析函数序列的极限，引进了一种新的积分：

设$f(x)$，$a(x)$是在$[a,b]$上有定义的有界函数，用分点$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$将$[a,b]$分为n个子区间，并以Δ记这一分划，在$[x_{i-1}, x_i]$内任取一点$\xi_i$，作$S_\Delta=\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)[a(x_{i-1})-a(x_i)]$，如果当分划Δ的子区间长度的最大值趋于零时，不管区

间如何分划及点ξ_i如何取法S_Δ都收敛到一个确定值，则称此极限值为$f(x)$关于$a(x)$的斯蒂尔吉斯积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}a(x)$。

斯蒂尔吉斯积分显然推广了黎曼和达布的概念，并成为后来从一般测度论上研究积分的开端。

斯蒂尔吉斯深入地研究过发散级数，并对这个课题作出了重大贡献。能用于表示和计算函数的那些发散级数，从本质上认清它们并给以确切的定义，就是由他和庞加莱分别独立完成的。斯蒂尔吉斯称这些级数为半收敛级数（庞加莱则称这些级数为渐近级数）。他是1886年在其学位论文中着手研究发散级数的，为此，他首先引进了一个级数渐近收敛于一个函数的定义。后来他又继续研究发散级数的连分式展开，并于1894年—1895年间写了两篇关于这个课题的著名论文。他的这项工作也是连分式解析理论的肇始，揭露了收敛性、定积分与发散级数的联系。其研究结果表明，发散级数至少分为两类：一类是，存在着一个适当的等价函数，它以这级数为它的展开式；另一类是，至少存在两个等价函数，都以这个级数为其展开式。连分式不过是级数与积分之间的一个过渡表示，也就是说，给定一个级数，通过连分式可以得到积分。因此，一个发散级数总能定义一个或多个函数，这些函数可以在一种新的“和”的定义下看作这个级数的收敛和。斯蒂尔吉斯基于对这个问题的研究还提出了所谓的“矩量问题”。他对正交多项式、近似积分、黎曼函数论、数论以及球面调和论等问题的研究，都取得了丰硕的成果。他的论文和著作几乎囊括了分析学的所有领域。

鲍莱尔 (Borel, Felix-Edouard-Justin-Emile)

(1871—1956)

鲍莱尔是法国数学家。1871年1月7日生于圣阿弗里克；1956年2月3日卒于巴黎。



鲍莱尔

鲍莱尔1893年毕业于巴黎高等师范学校，1894年获博士学位。自1893年毕业后，先后在大学（里尔大学、巴黎高等师范学校、巴黎大学理学院等）任教近50年之久。他除任教外，还担任过巴黎高等师范学校和安利普安卡尔大学的校长。1921年被选为法国科学院院士。1928年组建庞加莱研究所，并任所长直至去世。他还是苏联科学院和其它科学院的外籍院士。

鲍莱尔是本世纪第一流的数学家。他对数学分析、函数论、数论、代数、几何、数学物理、概率论等诸多分支都有过杰出的贡献，发表的论文达300多篇，多次获法国科学院奖。

鲍莱尔发展了现代数学分析的不同方向。1895年以来他深入地研究了发散级数，可和性级数理论的系统发展就是由他开始的。他引进了绝对可和性的概念，并证明了绝对可和的发散级数可以完全象收敛级数那样进行运算。换句话说，这种级数代表一个函数，并且可以象函数一样进行运算。例如，两个绝对可和级数的和、差、积仍是绝对可和的，并且分别是每个级数所代表的

函数的和、差、积，类似地对绝对可和级数的微商也成立。他曾借助于级数来研究任意函数。他写的《发散级数论》（1899年）获得法国科学院大奖。鲍莱尔清楚地认识到从一个区间的所有开复盖中能够选出有限个覆盖的重要性。他完善了海涅（Heine）提出的覆盖定理，即现在的所谓“海涅-鲍莱尔定理”或“有限覆盖定理”，此定理和戴德金的“分割”法则、区间套定理、波尔察诺-魏尔斯特拉斯聚点存在定理是等价的。

鲍莱尔1898年改进了容度的概念，提出了测度的概念，从而发展了测度理论。鲍莱尔还是最先注意到康托尔思想的重要性的一位数学家，并首先把康托尔的思想用于函数论。他的主要著作发表在《函数论专集》中，这部专著对后来函数论的研究产生过重要的影响。

鲍莱尔发展了解析函数。例如，他引进了单演函数，这种函数是复平面的一般点集上的可微函数。

鲍莱尔对概率论也有深入的研究，他把概率论同测度论相结合，引进了可数事件集的概率，填补了古典有限概率和几何概率之间的空白。他还研究过对策论。

鲍莱尔不仅是一位杰出的数学家，而且还是一位著名的社会活动家。他曾任法国国民议会议员（1924—1936年）、海军部长（1925—1940年）。还当过市长。第二次世界大战期间参加抵抗运动，并荣获抵抗运动奖章（1954年）。他曾被授予大十字军功章（1950年）和国家科学研究中心颁发的第一枚金质奖章。

鲍莱尔1920年曾到中国进行过学术访问，并逗留了五个月。

勒贝格 (Lebesgue, Henri Leon)

(1875—1941)


勒贝格

勒贝格是法国数学家。1875年6月28日生于博韦；1941年7月26日卒于巴黎。

勒贝格在博韦读完中学后，于1894年入巴黎高等师范学校攻读数学，并成为鲍莱尔的学生，1897年获该校硕士学位。毕业后曾在南希一所中学任教。1902年在巴黎大学通过博士论文答辩，取得哲学博士学位。1902—1906年任雷恩大学讲师。从1906年起先后在普瓦蒂埃大学、巴黎大学、法兰西学院任教，1919年晋升为教授。1922年当选为法国科学院院士，1924年成为伦敦数学会荣誉会员，1934年被选为英国皇家学会会员。他还是苏联科学院的通讯院士。

勒贝格是本世纪法国最有影响的分析学家之一，也是实变函数论的重要奠基人。

勒贝格的成名之作是他的论文《积分，长度，面积》(1902年)和两本专著《论三角级数》(1903年)、《积分与原函数的研究》(1904年)。在《积分，长度，面积》中，第一次阐明了他关于测度和积分的思想。他的工作使19世纪在这个领域的研究大为改观，特别是在鲍莱尔测度的基础上建立了"勒贝格测度"，并以此为基础对积分的概念作了最有意义的推广：即把被积函数

$f(x)$定义的区间$[a,b]$分成若干个勒贝格可测集，然后同样作积分和，那么原来划分子区间方法的积分和如果不收敛，则现在划分为可测集的方法就有可能收敛。于是按黎曼意义不可积的函数，在勒贝格意义下却变得可积。他在《积分与原函数的研究》中还证明了有界函数黎曼可积的主要条件是不连续点构成一个零测度集，因此从另外一个角度给出了黎曼可积的主要条件。要想从一个不太抽象的角度，用几句话就能概括勒贝格测度和勒贝格积分的概念及其在近代数学中的巨大作用，是极为困难的。可以这样说，大家熟知的黎曼积分有如下若干缺点，严重地限制了积分概念在自然科学中的应用。第一，黎曼积分中的被积函数只能是定义在实直线R的闭区间上（或R^n的闭连通区域上）的实值函数，但实际上有用的函数f，其定义域可以是R或R^n的某些适当的子集。第二，黎曼可积的函数类甚为狭小，基本上是“分段连续函数”构成的函数类。第三，许多收敛的黎曼函数序列，其极限函数却不是黎曼可积的。即使是黎曼可积的，但积分与求极限的过程也不是随便可交换的。这些缺点不仅在泛函分析中导致严重困难，而且在无穷级数的逐项积分这种简单问题上也导致了严重的困难。正是勒贝格在本世纪初开创的这些工作为扫除这些障碍提供了理论工具。按照勒贝格意义下的积分，可积函数类大大地扩张了；积分区域可以比闭连通域复杂得多（R或R^n）的子集；收敛性的困难大大地减少了。

勒贝格积分的理论是对积分学的重大突破。用他的积分理论来研究三角级数，很容易地得到了许多重要定理，改进了到那时为止的函数可展为三角级数的充分条件。紧接着导数的概念也得到了推广，微积分中的牛顿-莱布尼茨公式也得到了相应的新结论，一门微积分的延续学科——实变函数论在他手中诞生了。

勒贝格的理论，不仅是对积分学的革命，而且也是傅里叶级数理论和位势理论发展的转折点。

勒贝格还提出了因次理论；证明了按贝耳（Baire）范畴各

类函数的存在；在拓扑学中他引入了紧性的定义和紧集的勒贝格数。他的覆盖定理是对拓扑学的一大贡献。

和任何新生事物一样，勒贝格的理论一开始并未得到数学家们的赞赏。例如，数学家埃尔米特曾说："我怀着惊恐的心情对不可导函数的令人痛惜的祸害感到厌恶"。当勒贝格写了一篇讨论不可微曲面《关于可应用于平面的非直纹面短论》论文，埃尔米特就极力阻止它发表。勒贝格从1902年发表第一篇论文《积分，长度，面积》起，有近十年的时间没有在巴黎获得职务，直到1910年，才被同意进入巴黎大学任教。勒贝格在他的《工作介绍》中感慨地写道："对于许多数学家来说，我成了没有导数的函数的人，只要当我试图参加一个数学讨论会时，总会有些分析家说：'这不会使你感兴趣的，我们在讨论有导数的函数。'或者一位几何学家就会用他的语言说：'我们在讨论有切平面的曲面'。"但到了本世纪30年代，勒贝格积分论已广为人知，并且在概率论、谱理论、泛函分析等方面获得了广泛的应用。

勒贝格具有基于直观几何的深刻洞察力。他的工作开辟了分析学的新时代，对20世纪数学产生了极为深远的影响。他的论文收集在《勒贝格全集》（5卷）中。

鲁滨逊（Robinson，Abraham）

（1918—1974）


鲁滨逊

鲁滨逊是美国数学家。1918年10月6日生于德国瓦尔登堡城（现属波兰，改名为瓦乌布日赫）；1974年4月11日卒于美国康涅狄格州纽黑文城。

鲁滨逊出生在一个犹太家庭，父亲是一位哲学博士，母亲是一位教师。鲁滨逊1936年入耶路撒冷的希伯来大学学习，1939年到法国巴黎大学进一步深造。不久，就爆发了第二次世界大战。大战期间他服务于英国法恩伯勒的皇家空军基地，并结合实际需要进行应用数学和机翼理论的研究。战后，在英国克兰菲尔德航空学院任教，不久希伯来大学补授他科学硕士学位。1951年被聘为加拿大多伦多大学应用数学系副教授，1956年晋升为正教授并兼任系主任。1957年被聘为希伯来大学讲座教授，同年获伦敦大学科学博士学位。1962年被聘为美国加利福尼亚大学洛杉矶分校教授，1967年任耶鲁大学数学系教授。1972年被选为美国文理科学院院士，1974年当选为美国国家科学院院士。

鲁滨逊才华横溢，20岁之前就开始发表论文。一生共发表论文140余篇（其中约30篇是与人合写），出版专著10本（其中3本是与人合著）。他的研究遍布数理逻辑、元数学、代数、分析、空气动力学等各个领域。

鲁滨逊最广为人知的贡献是非标准分析。17世纪，由牛顿、莱布尼茨等人，利用直观无穷小的概念，建立了微积分。但不论是牛顿的“刹那”，还是莱布尼茨的微分，有时解释为0，有时又不为0，在逻辑上不能自圆其说。因此遭到种种非难。直到柯西、魏尔斯特拉斯等人引入了严格定义——用“$\varepsilon-\delta$”或“$\varepsilon-N$”来刻画极限过程，才使微积分学建立在可靠的逻辑基础之上。但是，自魏尔斯特拉斯以后，学习微积分的学生一再被告诫：无穷小并不是“一个数”，而是一个变化过程，即不断向常数0任意逼近的一个变量。这样，微积分学的论证往往变成了一连串求极限的推导。失去了当初使用“无穷小”时的那种直观、生动、活泼、易于发现和解决问题的思想方法。当年的“无穷小”在数坛上几乎销声匿迹，偶尔提到它，也不过是习惯的用语而已。直到本世纪50年代，由于模型论的产生与发展，才为无穷小概念的复苏准备了客观条件。1960年鲁滨逊在普林斯顿大学的一次报告中指出：现代数理逻辑的概念和方法能为“无穷小”作为“数”进入微积分提供合适的框架。他阐明了，无穷小作为真正的数学对象确实存在的，并且为从另一途径严格地建立起微积分奠定了基础。1961年，他在荷兰阿姆斯特丹皇家科学院学报上发表了在数学历史上具有划时代意义的论文——《非标准分析》，标志着这一新数学分支正式诞生。

鲁滨逊的基本观点是：无穷小虽然不是一个“数”，在实数系R中没有它的位置，但是可以把实数系扩大，使之成为超实数系R^*。在R^*中，通常的实数为标准数，而它的周围聚集着许多“无穷小”（叫做非标准实数），犹如电子围绕原子核一样。在R^*中阿基米得公理不再成立，即任取正实数α与β，不一定都能找到自然数n，使$n\alpha>\beta$，因为无穷小是大于0的非标准实数，它的任意整数倍仍是无穷小，不可能大于正标准数β。鲁滨逊用数理逻辑中模型论的方法，在R^*中建立微积分的概念保持当年牛顿-欧拉时代的直观性和简便性。

鲁滨逊运用数理逻辑的方法，使“无穷小”堂而皇之地重返数坛，成为逻辑上站得住脚的数学成员。这不但使微积分得到了巩固与发展，而且从哲学上来看，也别具意义。为了与柯西、魏尔斯特拉斯等人用极限方法建立的标准分析相区别，故定名为非标准分析。非标准分析是一种既把“无穷小”作为“数”又能精确阐述微积分思想的一种处理方法。它的确把17和18世纪用直观“无穷小”的论证置于了严格的逻辑基础之上。就实质而言，非标准分析与标准分析是等价的，即前者所能证明的命题也能为后者所证明，反之亦然。但非标准分析有下述三点是值得重视的：第一，非标准数域R^*比标准数域R有更丰富的内涵，这就为应用上提供了更广阔和更有表现力的空间模式；第二，在分析论证与计算方式上，它比标准分析直捷了当，因为标准分析采用的极限论方法是分两步，即先是逐步近似，然后再完成极限过程，而非标准分析直接使无穷小、无穷大等广义实数参与运算，本质上只是一步。因此，它对发现新结果将更方便；第三，非标准区间的无限小分划具有貌似离散化的性质，从而成为离散数学（如组合数学）技巧能转移连续数学领域的一个桥梁，而这一个过渡桥梁，却是标准分析不能提供的。但是由于构造R^*模型需要铺设沉重的逻辑框架，这可能是非标准分析尚未得到真正普及的一个重要原因。非标准分析是当代数学的一大发展。著名逻辑学家哥德尔（Göder）说：“不论从哪一方面看，非标准分析将会成为未来的数学分析”。当然它还将接受实践的检验，经受历史的考验。

鲁滨逊是模型论的奠基人之一。模型论是数理逻辑的一个分支，用以讨论形式语言与其解释之间或者模型之间的关系，是研究形式语言的语法和语义之间关系的学科。1951年鲁滨逊的《代数元数学》的发表，成为模型论这门新学科诞生的标志之一。1963年他还出版了专著《模型论和元数学引论》。

哥德尔曾说：鲁滨逊是“唯一的这样一位数理逻辑学家，他在使逻辑科学有效地应用到数学方面作出了比别人更多的成就，

我确信，他的名字将永世为数学家铭记。”为了表彰鲁滨逊的贡献，1971年耶鲁大学授予他“斯特林 (Steling) 教授”的荣誉称号；1973年荷兰数学会授予他布劳威尔 (Brouwer)奖章。

参 考 文 献

1. 梁宗巨，《世界数学史简编》，辽宁人民出版社，1981.
2. M·克莱因，《古今数学思想》（北京大学数学系数学史翻译组译），上海科学技术出版社，1979.
3. H.Eves,《An Introduction to the History of Mathematics》, 4th ed. New York 1976.
4. J.F. Scott,《A History of Mathematics》, London, 1958.
5. D.J. Struik,《A Concise History of Mathematics》London, 1954.
6. Б.В. Болгарский,《Очерки по Истории Математики》Минск, 1979.
7. D.E. Smith,《A Source Book in Mathematics》, New York, 1929.
8. D.J. Struik,《A Source Book in Mathematics》, Cambridge, 1969.
9. 钱宝琮主编，《中国数学史》，科学出版社，1964.
10. 李迪，《中国数学史简编》，辽宁人民出版社，1984.
11. 李俨，《中算史论丛》，科学出版社，1955.
12. 李俨、杜石然，《中国古代数学简史》，中华书局，1964.
13. 钱宝琮校点，《算经十书》，中华书局，1963.
14. 杜石然、范楚玉、陈美东、金秋鹏、周世德、曹婉如，《中国科学技术史稿》，科学出版社，1982.
15. 杨世珍、阎荃生等编著，《自然科学概论》，天津教育出版社，1987.
16. 申漳著，《简明科学技术史话》，中国青年出版社，1981.
17. 杨沛霆，《科学技术史》，浙江教育出版社，1984.
18. J·D·贝尔纳，《历史上的科学》（伍况甫等译），科学出版社，1959.
20. A·沃尔夫，《十六、十七世纪科学技术和哲学史》（周昌忠等

译），商务印书馆，1959.

21. F·梅森，《自然科学史》（周煦良等译），上海译文出版社，1980.

22. 《中国大百科全书》（数学卷），中国大百科全书出版社，1988.

23. 《简明不列颠百科全书》，中国大百科全书出版社，1985.

24. 日本数学会编，《数学百科辞典》，科学出版社，1984.

25. I. Asimov, 《Asimovs Biographical Encyclopedia of Science & Technology》, New York, 1982.

26. C.C. Gillispie, 《Dictionary of Scientific Biography》, New York, 1970—80.

27. Ю.В. Прохорв, 《Математический Энциклопедический Словарь》, Москва, 1988.

28. А.И.Бородин, А.С.Бугай' 《Биографический Словарь Деятелей в области Математики》, Киев, 1979.

29. 梁宗巨主编，《数学家传略辞典》，山东教育出版社，1989.

30. 沈永欢、齐玉霞、张鸿林编译，《简明数学词典》，新时代出版社，1989.

31. 曾少潜主编，《世界著名科学家简介》，科学技术文献出版社，1981.

32. 曾少潜编，《科学名人词典》，中国青年出版社，1988.

33. 李心灿、黄汉平编著，《数坛英豪》，科学普及出版社，1989.

34. H. Eves, 《Great Moments in Mathematics》 (Before 1650), Wash., D.C.: Mathematical Association of America, 1983.

35. 周金才、梁兮编著，《数学的过去、现在和未来》，中国青年出版社，1982.

36. 卡尔·B·波耶，《微积分概念史》（上海师范大学数学系翻译组译），上海人民出版社，1977.

37. C·H·爱德华，《微积分发展史》（张鸿林译），北京出版社，1987.

38. 李心灿、徐兵，《高算数学概观》，知识出版社，1989.

39. 张奠宙、赵斌编著，《二十世纪数学史话》，知识出版社，1984.

40. 李学数著，《数学和数学家的故事》，广角镜出版社，1980.

41. 杨沛霆著，《近代科学技术的继承与发展》，科学技术文献出版社，1978.

42. 蒋术亮编著，《中国在数学上的贡献》，山西人民出版社，1984.

43. T·丹齐克，《数学科学的语言》（苏仲湘译），商务印书馆，1985.

44. 朱学志，《数学史数学方法论选讲》，黑龙江省林业教育学院，1984.

45. G·F·塞蒙斯著，《微分方程》（张理京译），人民教育出版社，1981.

46. 西安交通大学数学系编，《高等数学重点内容辅导》，西安交通大学出版社，1988.

47. B·帕斯卡尔著，《思想录》（何兆武译），商务印书馆，1985.

48. G·波利亚著，《数学与猜想》（李心灿、王日爽、李志尧译），科学出版社，1984.

49. L·斯蒂恩主编，《今日数学》（马继芳译），上海科学技术出版社，1982.

50. 胡作玄编著，《布尔巴基学派的兴衰》，知识出版社，1984.

51. 鲁又文编著，《数学古今谈》，天津科学技术出版社，1984.

52. 张瑞琨主编，《近代自然科学史概论》，华东师范大学出版社，1986.

53. A·加德纳，《无限过程——数学分析的背景》（姚允龙 译），上海第二工业大学，1984.

54. 高希尧，《数学史讲义》.

55. A·鲁滨逊著，《非标准分析》（申又枨、王世强、张锦文等译），科学出版社，1980.

56. E·厄泽尔，《开普勒传》（任立译）科学普及出版社，1981.

57. H·武辛著，《伊萨克·牛顿》（伯幼、任荣译），科学普及出版社，1979.
58. 申先甲，《牛顿》，云南人民出版社，1980.
59. 牛素琴、杨汝戳、徐佩印、施桂英编选，《中外名人格言精华》，甘肃人民出版社，1982年.
60. H·И·科万佐夫，《数学与数学家趣话》，（陈淑敏等译），黑龙江科学技术出版社，1983.
61. 尹斌庸等著，《古今数学趣话》，四川科学技术出版社，1985.
62. 胡作玄，《第三次数学危机》，四川人民出版社，1985.
63. 郑维行等编，《实变函数与泛函分析概要》，人民教育出版社，1980.
64. A·Д·亚历山大洛夫等著，《数学——它的内容、方法和意义》（裘光明等译），科学出版社，1962.
65. 嘉·阿达玛，《关于科学史问题 微积分学的诞生》（郭书春译），数学史译文集，上海科学技术出版社，1981.
66. A.П.Юшкевич，《微分学简史》（罗国光译），数学通报，1954年第6期.
67. A.П.Юшкевич，《积分学简史》（罗国光译），数学通报，1955年第2期.
68. 于琛，《浅谈微积分发展简史（一）——微积分产生的因素和先驱工作》，数学通讯，1983年第6期.
69. 于琛，《浅谈微积分发展简史（二）——牛顿和莱布尼兹及其工作》，数学通讯，1983年第11期.
70. 白尚恕，《圆锥曲线小史》，数学通报，1964年第2期.
71. 吴文俊，《中国数学史的新研究》，自然杂志，1989年第7期.
72. 郭书春，《刘徽在数学上的伟大贡献》，数学的实践与认识，1983年第3期.
73. 李俨，《祖冲之》，科学大众，1959年第9期.
74. 许莼舫，《中国伟大的科学家——祖冲之》科学大众，1953年第5期.
75. 舒群，《伟大的进步科学家祖冲之》，数学的认识与实践，

1974年第4期.
76. 梁宗巨,《对祖冲之的一些误解》,数理化信息,I,1985.
77. 袁向东,李文林,《笛卡尔的<几何>和解析几何的诞生》,数学的实践与认识,1980年第2、4期.
78. 陈守义,《笛卡尔与解析几何的创立》,数学通讯,1983年第4期.
79. 许同力,《在代数和几何间寻找最优方案——解析几何的产生》,数学通报,1984年第12期.
80. 李迪,《费尔马在数学上的伟大贡献》,数学通报,1965年第1期.
81. 李心灿,《杰出的业余数学家费尔马》,数学通报,1985年第9期.
82. 冯立升,《费尔马和他的数学工作》,数学的实践与认识,1987年第2期.
83. 李迪,《纪念巴斯加逝世三百周年》,数学通报,1962年第8期.
84. 孙小礼、张祖贵,《莱布尼茨与微积分》,数学的实践与认识,1987年第4期.
85. 孙小礼、张祖贵,《莱布尼茨与离散数学》数学的实践与认识,1988年第1期.
86. 李心灿,《贝努利数学家族》,数学通报,1986年第9期.
87. 解延年,《慧眼独具的盲人数学家——欧拉》,数学通报,1983年第9期.
88. 吕玉明,《十八世纪的数学巨匠——欧拉》,科学纵横,1983年第1期.
89. 傅钟鹏,《欧拉——数学家之英雄》,数学通讯,1983年第1期.
90. Jean Itard,《拉格朗日传》(徐祖华译),数学译林,1985年第3期.
91. 刘钝,《拉格朗日——把力学奠基在严密的数学基础上的人》,工科数学,1985年第3期.
92. 绍庚,《纪念拉格朗日逝世150周年》,数学通报,1963年第8

期.
93. 王青建,《傅里叶(Fourier)——一位受人敬重的科学家》,数学的实践与认识,1988年第2期.
94. N.T.巴士玛柯娃,《卡尔·费里德利赫·高斯》,(陈维勇译),数学通讯,1955年第9期.
95. 袁小明,《伟大的数学家高斯》,数学通讯,1981年第5期.
96. Hans Freudenthal,《CAUCY传》,(罗声雄译),数学译林,1984年第4期.
97. Gosdon, M.Fisher,《Cauchy和无穷小》,(井竹君译),数学译林,1981年第8期.
98. 罗声雄,《柯西(Cauchy)——一位高产的数学大师》,数学的实践与认识,1987年第3期.
99. O.Oro,《Abel传》,(冯绪宁译),数学译林,1982年第1期.
100. 黄汉平,《迎战难题的阿贝尔》,数学通报,1986年第10期.
101. 解延年,《哈米尔顿》,数学通报,1987年第6期.
102. Thomns Hawkins,《柏林数学学派》,(王翼勋译),数学译林,1985年第1期.
103. 袁小明,《清末数学家李善兰》,数学通讯,1982年第12期.
104. Hans Freudenthal,《RIEMANN传》,(徐祖华、袁小明译),数学译林,1987年第3期.
105. CCD. Mostow,《Abraham Robinson》, Israel Journal of Mathematics, Volnme 25, 1976.
106. 乔松楼,《科学巨匠的误区》,北京晚报,1990年4月21日第8版.
107. 徐利治著,《微积分大意》,科学技术文献出版社,1389.
108. M·斯皮瓦克著,《流形上的微积分》(齐民友,路见可译),科学出版社,1980.
109. J·道本著,《康托的无穷的数和哲学》(郑毓信,刘晓力编译)江苏教育出版社,19888.